

從建模觀點探討學生數學解題決策之 轉變及其影響因素

陳蕙茹

高雄市立新興高中教師

柳 賢

國立高雄師範大學榮譽教授

摘 要

數學解題決策是影響解題成效之關鍵。然而傳統數學解題多重視解題者解題條件與策略的使用，而忽略了對解題條件的「選擇」。但日常生活問題不可能提供「明確」條件來要求學生找出「特定」答案。故，有必要培養其適當解題決策之能力。建模觀點提供了解題者透過決策來解決問題 (Lesh & Doerr, 2003)，且建模循環歷程實與「決策」有關 (Kehle & Lester, 2003)。因此本研究從建模觀點，設計引模活動來探討解題者之決策轉變與其影響因素。

研究結果發現學生產生決策的轉變有：局部→全面性的條件的選擇與使用；主觀解釋→客觀證據支撐；質性描述→量化資料。影響原因有：參與討論的積極度；解題記錄的書寫與討論；提供討論的空間。最後，研究者對教學與研究提出相關建議。

關鍵詞：建模、數學解題、決策

壹、緒論

回顧傳統之數學問題解決的方式，無非是提供一個或數個「明確的已知」條件，要求解題者根據這些條件，透過一些捷思法來找出答案（Schoenfeld, 1985; Mayer, 1992）。數學解題研究者所探討的是，解題者之解題歷程及解題策略，即從一個已知的條件，到達另一個已知但解題者尙未知悉的答案之途徑，解題之目的在於克服此途徑之障礙（Reed, 2000）。Sternberg（1985/2005）進而解題之題目分為結構清楚與不清楚者。然而，真實生活問題不只屬於後者，且其問題情境中所蘊含之條件未必是明確與顯然可知。倘若，期許解題者運用已習得數學知識去解決生活問題，那麼他所需具備之能力則不僅僅涉及對問題情境內條件的選擇，也包含了數學化的能力。此種能力之培養，在傳統之數學解題與學習中是被忽略的。因此，欲從傳統數學解題之觀點落實九年一貫課程所追求的教學目標—培養學生帶得走之數學能力，似乎是力不從心的，難以達成。

爲了改善傳統數學解題與學習之缺失，Lesh 與 Doerr（2003）提出另一個觀點—建模觀點。在建模活動中，數學解題活動所扮演的角色是一種「引模」活動，目的在於幫助學生發展其數學模型。同時，在建模循環中之簡化階段（simplify），與「決策（making decision）」有關，決定哪些條件是可忽略，發展出連結重要概念的感覺之方式，而抽象階段實則涉及數學化的過程（Kehle & Lester, 2003）。誠如 McIntosh 之觀點：「兒童使用的方法，雖然總是對的，但不是最迅速的，提供練習的機會是相當需要，但不是提供規則給他們。他們應先使用自己的方法，然後去觀察、解釋它們，假如那些方法不是最好的，再去建議一些較好的。」（McIntosh, 1977; Johnston-Wilder, 2004）。數學建模的觀點提供了解題者透過決策，主動發展、精緻，及應用數學模型解決問題。其中，數學教師所扮演的是推手的角色，協助啓動學生發展模型。

在數學教育領域，關於數學建模的相關研究中，Doerr 與 English（2003）發現，中學生有能力創造出一個既一般化又可重複使用的系統或模型。Lin 與 Yang（2005）認爲學生在建模活動中探索解答將有助於其進行情境的推理、數學化、解釋與溝通。雖然台灣這幾年已逐漸重視數學建模能力之培養，然而其數學教學與學習之相關研究仍在初期，且未深入探討數學建模與數學解題兩者之關係。由於解題決策是成功解題之首要關鍵，因此本研究嘗試從建模觀點，設計出引模活動來探討數學解題時所做之決策之轉變其影響因素，以供數學教師培養學生運用數學解決能力之參考。基於本研究之目的所衍生出的研究問題有二：一、學生在建模活動中所產生的解題決策歷程爲

何？二、學生在建模活動中所產生的解題決策歷程之轉變及其影響因素為何？

貳、文獻探討

學生於數學解題中所作之決策，乃決定於學生對數學問題的理解與詮釋，以及其所經歷之歷程。基於本研究之目的，從建模觀點來探討學生數學解題決策轉變及其影響因素，因此研究者先探討數學解題與數學建模對「問題」看法之異同，接著探討「建模」循環與「解題」歷程之異同，再嘗試將數學解題與數學建模進行整合，最後說明數學建模之相關研究。

一、數學解題與數學建模對「問題」看法之異同

自 1980 年代至今，「數學解題」一直是數學教育所重視的議題之一，而對學生解題能力的培養更是數學教學持續追求的目標。回顧以往的問題解決之研究，雖然許多學者對其給予不同的定義，但無非意指提供一個已存有「明確的已知」條件的問題情境，企圖要求解題者根據這些條件，尋找一些策略來達成已設定之目標。在數學解題研究中，「問題」是一種「情境」(Kantowski, 1980; Kilpatrick, 1985; Schoenfeld, 1985)，產生於從一「條件 (given)」狀態到「目標 (goal)」狀態間，因無明顯路徑可循而造成的障礙 (Mayer, 1985) 之情境。解題者在此狀況下，欲達其目標，卻苦找不到例行性的方式或可直接通往的方法 (Schoenfeld, 1985) 時，即需設法運用一些數學概念、原理與方法 (Kilpatrick, 1985) 來尋求答案，而經歷此過程的心智運作歷程，稱之為「問題解決」(Mayer, 1985)。雖然，數學解題之問題情境，強調沒有一種保證可以解決的算則可達成目標，但無置可否的，傳統的問題解決預設了特定的條件與特定的目標。

雖然，目前的數學解題研究，改進以往對應用問題情境的探討，將其轉變成對生活問題情境的探討，但當學生真正處理真實生活問題時，卻很少運用所學之數學概念或原理來解決。原因之一，在於真實生活情境中所蘊含之條件，未必是明確與顯然可知，並且與傳統的問題解決之訓練方式或教科書中之問題情境不同。亦就是說，當學生欲以數學概念或原理解決真實生活之問題情境前，必須先洞察到可使用之「問題條件」，再將其轉化成數學問題來解決。在此轉化的過程中，涉及了建模的過程，亦即讓學生使用已有的模型，透過數學的形式去解決真實生活問題，其中也包括了數學化過

程。在建模活動中，解題活動僅是學生從事建模活動中之一種引模活動，用來幫助學生發展模型 (Lesh & Doerr, 2003)。因此，建模活動的問題情境包含了不同的解題情境，即後者是依據建模者對真實生活問題中蘊含之條件的洞察與抉擇而衍生，故後者之問題情境乃隨著前者的調整而有所改變。

二、「建模」循環與「解題」歷程之異同

Polya (1945) 在 “How to solve it” 中將數學解題歷程區分為：了解問題、擬定計畫、執行計畫與回顧解答，等四個階段。也就是說，解題者必須先知道問題的條件與目的，並依此計畫與執行解題，最後檢驗所得的答案。欲成爲一個成功的解題者，Kilpatrick (1985) 認爲除了需具備相關的數學知識外，仍需呈現出轉換此問題的過程，以及引導解題之控制過程。爲了彌補 Polya 所提之數學解題歷程的缺點，Lester 與 Schoenfeld (1985) 增加後設認知的觀點來探討解題歷程，且皆將解題歷程分爲六個階段。前者將解題歷程分爲：問題覺知 (awareness)、問題理解 (comprehension)、目標分析 (goal analysis)、計畫發展 (plan development)、計畫執行 (plan implementation)、評估 (evaluation)；後者則分爲：讀題 (reading)、分析 (analysis)、探索 (exploration)、計畫一執行 (planning-implementation)、驗證 (verification)、轉變 (transition)。兩人不同處在於 Lester 強調在解題前，解題者對問題情境的覺知；而 Schoenfeld 重視在解題後，解題者對新舊解題途徑的評估。此外，Mayer (1992) 也強調解題歷程中的問題表徵，並將其分爲兩個步驟：問題轉譯 (translation) 與問題整合 (intergration)。綜合上述學者的觀點，可以將數學解題歷程區分爲七個階段：問題覺知、問題理解與表徵、分析、探索、計畫-執行、驗證與轉變。

模型，在數學學習上，是指一個包含元素、運算、關係、規則的動態系統，而此系統可用來描述、解釋、預測其他熟悉之系統的行為 (Lesh & Doerr, 2003)。數學教師透過所設計之一連串的建模活動來幫助學生發展排序系統，並對學生所發展其對問題情境之解釋提供一個檢驗，檢驗他們對系統內相關元素的推理，對量、運算、表徵的選擇以及多重循環的詮釋 (Doerr & English, 2003)。建模循環包括了簡化階段 (simplify)、抽象階段 (abstract)、計算階段 (calculate)、解釋階段 (interpret) 的循環等四個階段，此過程不僅涉及了內在概念系統 (internal conceptual systems) 的建立，需透過書寫符號、口說語言、圖形、圖表，及具體的操作，來外化其內在概念系統，幫助學生與自己溝通及促進學生間相互溝通。故，建模活動同時涉內在概念系統、表

徵系統 (representational systems) 與外在系統之間不斷地交互作用 (Lesh & Doerr, 2003)。

三、數學解題與數學建模之整合

有別於傳統的問題解決，當學生使用已有的模型去解決應用問題，學生所參與的解題活動僅是學生從事建模活動中之一種引模活動，其用意在於幫助學生發展模型。學生進行之建模循環包括了四個階段：簡化階段 (simplify)、抽象階段 (abstract)、計算階段 (calculate)、解釋階段 (interpret) 的循環。如圖 1 所示，「簡化」階段與做決策 (making decision) 有關，決定哪些條件是可忽略而哪些是需要的，此階段不僅涉及到數學解題歷程中的「問題覺知」、「閱讀理解」，也同時需對題目的條件進行抉擇，進而發展出與重要概念連結的感覺之方式。抽象階段則涉及選擇形式的數學概念，去表現真實世界模型的特徵 (Kehle & Lester, 2003)，亦即涉及了數學解題歷程中的「問題表徵」、「分析」、「探索」、「計畫」等過程，計算階段則與解題歷程中的「執行」、「驗證」有關，最後的解釋階段除了將符號系統的結果應用到真實的問題中，也包括了解題歷程中的「轉變」過程，更涉及了「反思」的過程。此外，建模循環過程中同時涉及數學化過程。所謂的數學化，分為水平數學化與垂直數學化 (Treffes, 1987)，水平數學化是指從生活世界轉變到符號世界的過程，垂直數學化則是在符號世界內部的轉變過程 (Freudenthal, 1991)。這兩種過程則在學生的解題活動中被啟動而建構出數學模型。

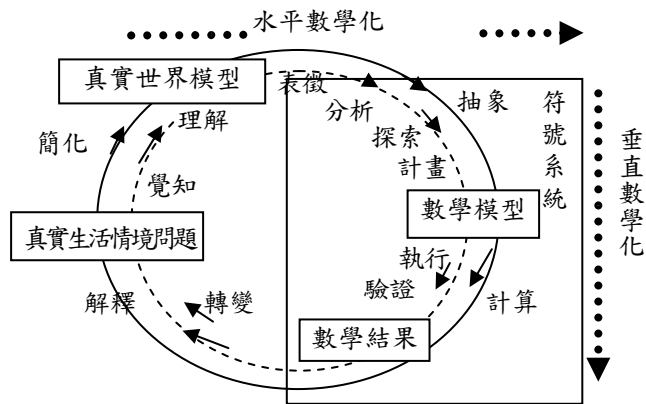


圖 1. 理論架構圖

四、數學建模之相關研究

來自荷蘭 RME 的經驗可知，初始的建模活動，是鑲嵌在學生現實世界的情境問題來實施，學生透過引模活動（亦即解題活動），逐漸使其數學概念的模型浮現。這一連串經由建模活動所產生的模型，是提供學生進步的機會，而不是阻塞追溯理解源頭的路（Van den Heuvel-Panhuizen, 2003）。

論及建模之相關研究，Doerr與English（2003）以中學生為對象，研究發現其能創造一個具有一般化且可重複使用的系統或模型，來對所提供的資料進行選擇、排序與加權。Izsak（2003）研究發展兩位八年級的學生的建模知識，結果證明學生具有評價代數表徵的標準且能使用這個標準。雖然，相較於幾個主要的先進國家，台灣數學教育在發展「數學建模」方面稍顯微弱（林國源，2004），但近幾年來，已有逐漸被重視之趨勢。例如，吳依芳（2003）以「線型函數」單元為主題所進行的實驗研究，發現「建模教學方式」有助於學生將概念提升至物化層次。Lin與Yang（2005）研究發現，雖然無法解出數學模型是高中學生的共同的數學思考特徵，但他們在建模活動中探索解答，將有助於進行情境的推理、數學化、解釋與溝通。胡政德（2006）以準數學教師進行研究，發現在建模過程中，從複雜情境到數學模式中存在「物件—模式」與「操作—模式」這兩種不同的情境模式，而情境模式蘊含著形成數學模式的概念。令人惋惜的是，台灣目前的教學環境，仍不利於數學教師於課堂中進行建模教學（楊凱琳、林福來，2006），但，我們又不能否認與輕忽數學建模對於培養學生所需數學知能的重要性，因此本研究嘗試從此觀點來探討學生之數學解題。

參、研究方法

本研究之進行前，此三位受試者已從其他的引模活動設計中經驗建模循環的過程，也透過合作方式從事資料建模活動。因此，他們對這種活動與模式並不陌生。根據本研究之目的，以下研究者將分別說明其引模活動設計、研究對象、研究場域與工具，以及資料分析。

一、引模活動設計

有別於學生之前所參與之引模活動，本研究之引模活動－「都市氣候」問題，則提供學生多樣的數據（如表 1 所示），讓學生對訊息做判斷，探討學生對資料選取、分析與解釋之能力。因此，學生在進行問題解決時，必須先依據問題中所提供的線索，來判斷用來解題之條件，進而發展出排序系統。由於學生所考慮的因素未必相同，故在解題因素選擇過程中，三位學生必須透過彼此討論與協商來達成共識，進而做出解題決策。

表 1
都市氣候資料

都市	放晴天數 (天)	最月均溫低於 18 度 (個月)	月均溫高於 28 度 (個月)	平均降雨 量 (mm)
台北	193	4	4	3027.8
新竹	234	4	2	2384.2
台中	238	4	2	2574.5
嘉義	248	4	2	2985.6
台南	268	2	4	3148.5
高雄	269	0	3	2811.6
宜蘭	177	4	2	3329.5
花蓮	218	1	1	2776.5
臺東	256	0	3	1577.1

註：採至中央氣象局網站

二、研究對象

本研究之研究對象為三位七年級學生：小箋、小安、小林。此三位學生為同班同學，皆由其數學任課教師依照學生之數學學習表現與表達能力而選取。在本研究之前已參與過建模活動，在建模過程中，此三位學生曾經採用文字敘述、數學算式、圖形與表格來表徵量化的資料，並且經驗了數學化過程。

三、研究場域與工具

本研究以學生就讀之學校圖書館為場地，並因此選擇在以不耽誤學生學習之時間

一午休時間與自習課時間來進行研究。全程錄影與錄音，並蒐集學生的解題記錄。研究後所進行之訪談則以錄音筆記錄。

關於本研究之引模活動—「都市氣候」問題，研究者參考 Doerr 與 English (2003) 的 Climate problem，從我國中央氣象局網站搜集台灣一些城市的氣象資料後加以整理而設計。問題設計後與數學教師討論並由兩個同年級學生先讀題，依其對題意的了解情形進行題目敘述的修改。最後，請專家審查。為了確保學生了解題目的內容，在學生解題前，研究者先與學生溝通，必要時進一步說明的內容，但解說之內容並不包括解題方向之暗示。

四、資料蒐集與分析

為了蒐集三位學生所進行的資料推理，研究者分別從錄影資料、錄音資料以及解題記錄三方面同時蒐集資料。為了確實分析其解題過程，研究者先轉錄錄音資料與錄影資料，並將轉錄結果加以編碼。錄音轉錄編碼為 abcd，a 表問題代碼，bcd 則為對話之流水號。編碼之後，將這三種資料同步進行比對與分析，如表 2 所示。

之後，研究者先縱貫分析學生在各題建模循環中所出現的解題類型，再橫向分析各題的解題決策的轉變，以及探索影響其轉變的原因。

表 2
資料分析舉隅

分析	對話
小箋與小林各自提出自己的主張	A1004 箋：BB 先生應該是花蓮。 A1005 林：BB 先生應該是高雄。
小箋與小林反駁彼此對溫暖的看法	A1006 箋：可是高雄有 3 個月月均溫高於 28 度。 A1007 林：可是不要太冷。
小安提出自己的主張	A1008 安：溫暖有陽光應該是高雄
小箋提出對溫暖的看法	A1009 箋：所謂的溫暖應該是不低於 18 度，不高於 28 度。
小林反駁小箋的看法	A1010 林：放晴天數沒有高雄好
小箋與小林各自提出自己的看法	A1011 箋：我是說先單只看溫度 A1012 林：我是說看全部

五、研究者的角色

在研究過程中，研究者扮演著佈題者與引模者的角色。當將建模問題提供給三位受試者時，研究者會先確認他們已經完全了解題意，必要時會對題目內容做說明，但不提供解題之線索。當三位受試者進行建模時，研究者不干涉他們的討論，當其討論陷入膠著狀態，研究者會對當時的問題進行提問，如爲什麼？如果...會怎樣？你們有何不同？可以怎麼做呢？但研究者不提供解題方向與策略。

肆、研究結果

基於研究之目的—了解學生在建模活動中所產生的解題決策之轉變與影響之因素，研究者先分析學生在各建模循環中的解題歷程，接著再橫跨建模循環分析學生解題決策之轉變與影響其轉變之因素。

一、學生在建模循環中的解題決策歷程分析

根據學生的解題歷程與表現，研究者以時間爲縱軸，將其分爲三個建模循環詳細說明，最後再呈現三位受試者最後的結論與表徵。

(一) 三個建模循環之解題決策歷程

循環一：討論 BB 先生的選擇

1. 各自根據題目中的「單一」條件當作解題決策，將城市進行分類

剛開始三人對題目中 BB 先生所需的條件：「溫暖有陽光」有不同的詮釋。小安注重的是「有陽光」，認爲依照「放晴天數」來排序，將這些城市分爲三類，認爲 BB 先生應該選高雄。小箋認爲「溫暖」就是「不低於 18 度不高於 28 度」，因此只需要依照各城市的溫度來排列就可以，同樣的將這些城市分爲三類，但認爲 BB 先生應該選花蓮。雖然小林表示應兼顧所有條件，但從他最初的解題方式，明顯可以看出他根據「放晴天數」將這些城市分爲三類，也認爲 BB 先生應該選高雄。三人最初的排序記錄如下表 3 所示（註：因小箋以粉紅色螢光筆記錄，原案經掃描後非常不清楚，因此研究者未呈現三人的原案）。

表 3
小林、小箋與小安最初的排序

(小林的排序)	(小箋的排序)	(小安的排序)	
依據放晴	依據溫度	晴天	
最好：(高雄 台南 台東) 南部	第一類：一年中只有四個月以下的月均溫不低於18°C也不高於28°C 台北	最好	高雄 26 9
中等：(新竹 台中 嘉義)	第二類：有5-8個月的月均溫不低於18°C也不高於28°C 新竹 台中 嘉義 台南 宜蘭		台南 26 8
最差：(宜蘭 台北 花蓮) 北部	第三類：有9-12個月的月均溫不低於18°C也不高於28°C 高雄 花蓮 台東	中等	台東 25 6
			嘉義 24 8
			台中 23 8
			新竹 23 4
		不好	花蓮 21 8
			台北 19 3
			宜蘭 17 7

2.經由「比對」彼此解答之異同，開啓「討論與溝通」彼此解題決策之管道，進而取得解題決策條件與結論之共識

(1) 因各自所持主張不同，而啓動對解題決策之「條件」看法的討論

從對話 A1004 至 A1012 可發現，小安與小林認為 BB 先生應該選高雄時，主張該選花蓮的小箋馬上從「月均溫」來反駁他們，因而促使他們對題目條件中「溫暖」二字定義的討論。同時，在各自主張的堅持之下，他們三人開始重新檢視自己的方法。

A1004 箋：BB 先生應該是花蓮。

A1005 林：BB 先生應該是高雄。

A1006 箋：可是高雄有 3 個月月均溫高於 28 度。

A1007 林：可是不要太冷。

A1008 安：溫暖有陽光應該是高雄。

A1009 箋：所謂的溫暖應該是不低於 18 度，不高於 28 度。

A1010 林：放晴天數沒有高雄好。

A1011 箋：我是說先單只看溫度。

A1012 林：我是說看全部。

(2) 經由對條件「支持」與「反駁」之辯論，產生了認知衝突，進而發生解題決策之改變。

雖然小林表示自己是兼顧所有條件 (A1012)，當他檢查自己的分析時，突然發現自己忽略「平均降雨量」這因素 (A1016)，而有些自責。當小箋聽到小林的喃喃自語後，馬上舉一特例來反駁小林的看法，他表示：與其依據平均降雨量來判斷，不如依據「放晴天數」來排序 (A1020)。接著，小安對小箋所舉之特例提出質疑 (A1021)，此舉反讓小箋再次肯定了「放晴天數」(A1021)。雖然如此，小箋仍然堅持自己原先的答案 (A1022)。

接著，小林改從「溫度」這面相來提出自己的看法，認為高雄與台東皆有 3 個月溫度高於 28 度 (A1027)。小箋則從「放晴天數」來反駁小林所主張的兩城市—高雄與台東，發現原先支持的花蓮只有 218 天放晴，但高雄的放晴天數最高，故改而主張高雄，認為 BB 先生應該選高雄 (A1029-31)。從上述對話 A1016 至 A1031 可發現，小箋對自己論點的「支持」以及對他人意見的「反駁」之辯證過程，使他對自己的解題決策產生了認知衝突，最後產生改變。再者，研究者發現，小林在最後的解釋中 (A1038)，表示最好天氣就是放晴，依放晴天數來排序。其轉變情形如表 4 所示，表中虛線框起來部分則為主要的轉變部分。

A1016 林：我怎麼沒有算到平均降雨量

A1020 箋：平均降雨量，一年假如只有一天降雨的話，看放晴天數較準

A1021 安：不可能一天下 3000 多吧，這樣台灣不就、、、。

A1022 箋：我是說假如下雨天數很少，我覺得看放晴天數較準。

A1025 箋：BB 先生應該是花蓮。

A1027 林：高雄、台東兩個 3 個月都高於 28 度。

A1029 箋：可是台東有 256 天放晴，花蓮只有 218 天放晴。

A1030 箋：花蓮放晴天數只有 218 天。

A1031 箋：BB 先生應該是高雄。

A1038 林 (指著他畫的表)：就是，BB 先生要溫暖有陽光，最好天氣就是放晴，最好天氣就是南部，中等是中部，最差是北部。天氣最好是南部 (依放晴排序)。

表 4
小林、小箋、小安對條件支持與反駁之分析

BB 先生：喜歡溫暖且有陽光的地方。不在乎是否下很多雨，但不想要太冷。

對話編號	(a1006)												(a1038)					
	6	7	8	9	10	11	12	16	20	21	22	27	29	30	38			
晴天			●		★		★		▽		▽		▽	▽	★			
<18°C		★		▽		▽	★											
>28°C	▽			▽		▽	★					★						
降雨量							★	★	▽	○	▽							

備註：支持：▽ (箋)、★ (林)、● (安)；反對：▽ (箋)、☆ (林)、○ (安)

(3) 透過「比對」解答取得共識，卻以討論結果當作解題決策之理由

經由討論後，小箋改變了原來的主張，使三人對 BB 先生所需的答案取得了共識，一致認為 BB 先生應該選高雄。然而，當研究者問及取得共識的方式時，小安卻表示因為「經由三種不同的方法得到相同的結果」，所以認為 BB 先生應該選高雄，其理由是高雄的放晴天數最多，也較溫暖。

A1044 師：你們的共識是怎樣？

A1045 箋：BB 先生是高雄。

A1046 師：你們的方法都不一樣，是怎樣達成共識？

A1047 安：方法不一樣，結論都一樣。

A2004 箋：你就按照放晴天數寫就好。

A2009 安：因為高雄有太陽很溫暖且放晴天數最多。

A2015 箋：因為 BB 先生的需求是溫暖有陽光，所以他的放晴天數要最多

從上述 1 和 2 中可看出，小林對所呈現的解題紀錄與其在討論中對題目條件的詮釋之間是不協調的。雖然，小箋對自己最初的主張是堅定的，經由討論之後，小箋原本單從「溫度」來解題，經由與小林和小安的答辯後，同意以「放晴天數」來思考 BB 先生的需求。當他們重新思考 BB 先生所提出的條件—溫暖有陽光時，最後同意最好的天氣就是「放晴」。至於小安，自始至終卻都堅持採用「放晴天數」來解題。研究者將建模循環一之解題決策歷程整理成圖 2。從圖 2 可知，原先三人各自作答時是未取得共識的，經由討論後才取得共識。

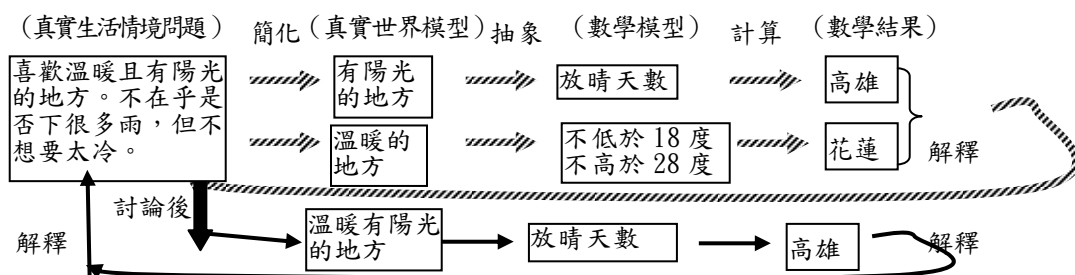


圖2. 建循環一之解題歷程

從循環一的解題討論可發現，三人初步發展出解題過程與取得共識的過程中，出現不協調，其產生共識的標準並非來自解題過程的結果，而是最後答案的一致性。再者，三人在討論時並未注意到 BB 先生所要求的「不在乎是否下很多雨」。且將「不想要太冷」與溫暖畫上等號，此可作為數學上的不等式與在生活用語之間存在著間隙的證據。

循環二：討論 KK 先生的選擇

1. 運用「多種條件」當作解題決策標準，透過「排除法」來進行排序

(1) 先根據「放晴天數」來限定答案的範圍

對於 KK 先生的需求，小安認為依據「放晴天數」來看 (A1067)，而小箋認為兩個條件都要滿足 (A1068)，小林提醒大家注意 KK 先生不想要「太熱」(A1069)。接著，小安仍依據「放晴天數」來排序，並提議將放晴天數設定為 240 天以上 (A1070)，作為一個評判的標準。雖然，起初三人對條件的選擇有所不同，但小箋也附和小安的想法 (A1071)。

A1066 箋：這樣應該是嘉義。

A1067 安：應該是看放晴天數。

A1068 箋：兩個都要滿足耶，嘉義較好。

A1069 林：那嘉義呢？放晴天數 248 天。他說不要太熱，可是花蓮的放晴天數只有 218 天。

A1070 安：放晴天數 240 天以上應該就可以了。

A1071 箋：對，放晴天數 240 天以上應該就可以了。

(2) 對彼此答案的反駁，啟動了相互討論，並接續依據溫度、降雨量來排除不符合之項目

經由放晴天數之排序後，小安開始尋找滿足為 240 天以上的城市，並且表示 KK

先生應該選台「東」(A1072)。小箋因誤聽成台「中」而加以反駁，因為他認為台中與嘉義之月均溫皆有兩個月高於 28 度，但台中卻只有 238 天放晴，因此不可能是台中 (A1073)。此也再次開啓了他們的辯論，並採用「溫度」、「降雨量」兩因素作為解題的決策標準，依此排除不符合的項目。最後，他們所取得的共識為 KK 先生應該選嘉義。

A1072 安：台東也可以。

A1073 箋（將台東聽成台中）：台中、嘉義都有兩個月高於 28 度，可是台中有 238 天放晴。

A1074 安：嘉義夏天很熱耶！

A1075 箋：台中會下雨。

A1076 安：我說台東。

A1077 箋：台東更熱！

A1078 林：台東降雨量最少，每天降一點點。

A1079 安：台南呢？

A1080 箋：台南太熱，4 個月月均溫高於 28 度。

A1081 林：應該是嘉義。

A1082 林：台東太熱，花蓮放晴天數太少。

從上述 (1) 和 (2) 中可發現，三人在處理 KK 先生的問題時，已漸漸注意到題目中的不同條件的要求，並當作評判的標準。從上述 (1) 中也發現，學生不只對評判的標準進行選擇，也同時考慮到條件的範圍。

2. 書寫結論時所進行的反思，促使對解題決策產生質疑，因而再次確定題目中條件的內涵。

當三人暫時取得共識後，整理其討論結果時，小安與小箋突然再次對題目中條件—「放晴」之定義提出疑問，並尋求更精確的解釋。

A1081 安：陰天算放晴嗎？

A1082 箋：放晴有把陰天算進去嗎？

A1083 研：這裡的放晴天數，是扣除一年內下雨天的天數。

雖然三人已取得共識，但從此部分可知，合作討論記錄，促進他們更深入的反思與討論。由此可發現，學生對條件的解釋已逐漸嚴謹化，其建循環二之解題決策歷程如下圖 3 所示。

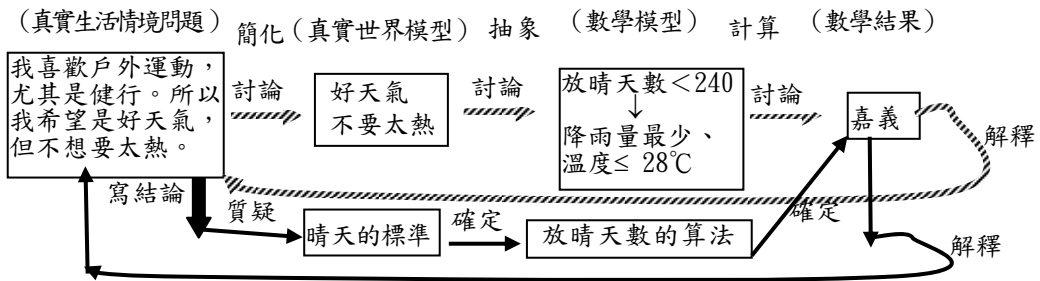


圖 3. 建循環二之解題決策歷程

循環三：討論城市的分群

1. 透過合作撰寫與討論解題記錄，啟動再次解題討論

對於三人的討論，研究者請他們共同寫一份書面報告。三人最後推派小安主筆，其他人在旁邊提供意見。從對話 A2019 至 A2035 可知，當將所有城市分類為三群時，他們一致認為台北是條件最差的城市。從他們的討論中可以知道，他們先根據放晴天數來排序(A2031、A2033)，接著再考慮到月均溫與降雨量來調整排序(A2033、A2035)。

A2019 箋：你們把氣候分為三群，你們有分嗎？

A2020 安：有呀，最好、中等、不好，這裡有寫。

A2021 箋：那只是放晴而已。

A2025 箋：最好的話，那最差的是台北，第一群、、、

A2027 箋：最爛的是台北。

A2031 箋：根據放晴天數只有 193 天，比所有的放晴天數。

A2033 箋：台北放晴天數只有 193 天，比其他的還要低，加上台北一年中有 4 個月的月均溫低於 18 度，有 4 個月的月均溫高於 28 度，所以只有 4 個月的月均溫比較適中，所以最後一名。

A2035 箋：他的降雨量也是在倒數中的，所以台北的天氣最差。

同時，在合作討論書寫內容時，排序的方式與理由再次引起討論。從對話 A2057 至 A2066 中可知，小安認為可從整體看來排序，並建議用「總合」來排序(A2057)。此引發小箋開始去思考要「如何加總」這個問題(A2058)，並開始嘗試「逐項」排序(A2061-6)。頓時，他們再次停止討論與書寫記錄，開始各自進行排序解題。

A2052 箋：你現在在排那一個？

A2053 安：KK 先生。

A2054 箋：在排那一種，放晴還是溫度還是？

從建模觀點探討學生數學解題決策之轉變及其影響因素

A2055 安：溫度。

A2056 箋：溫度的話，第一名是花蓮。

A2057 安：把這總合加起來。

A2058 箋：總合要怎麼加？

A2061 箋：最好的，放晴天數最好是高雄，溫度最好是花蓮、、、每個都不一樣，
嗨（提醒小安）！、、、

A2062 箋：1-----2-----3-----，我先把名次排出來。（箋開始排名次）

A2063 林：放晴天數最好是高雄、屏東。

A2064 箋：高雄、台南啦，269 和 268。

A2065 林：還有 256。

A2066 箋：256 是第三名，6 先把名次排出來（箋繼續排名次：...8...9...溫度的話
第一名是花蓮.1...2...）

2.經由對他人解題記錄之了解，促進學生對其解題決策進行批判性思考

在三人又各自排序一段時間後，研究者先分別對他們的紀錄進行提問，來了解他們的解題表現與思維。當其中一人解說其紀錄給研究者聽時，另外兩人也同時在旁邊聽，並且可以表示他們的意見。

當小安說明他的紀錄時，從對話 A2078 至 A2089 中可知，小箋與小林在旁邊一面看他的紀錄，一面聽他說明。在此過程中，他們發現小安的解題紀錄與他的解釋說明不符，故立即提出質疑，並幫小安重新解釋他的作法。在對話 A2092 至 A20100 中可發現，小箋同樣對小林的解說提出疑問，而小林也進一步補充說明自己的看法。在研究者拋磚引玉的介入過程中，彼此必須先看懂他人的紀錄，再提出自己的意見或為自己的解法進行答辯，啟動學生批判性的思考，對彼此的解題決策進行反思。

A2078 安：根據放晴天數排序。

A2081 研：一個根據放晴天數，另一個呢？

A2082 安：溫度。

A2083 箋：等一下，等一下，你這個不是根據放晴天數，也不是根據溫度，也不是根據降雨量。

A2084 箋：放晴天數第一名是高雄，因為他要求是要好天氣。

A2086 箋：他根據多方面的。

A2087 林：融合多方面的。

A2089 林：他把月均溫和放晴天數合在一起下去看、、、。

A2090 研：你怎麼知道誰要排第一個？

A2091 林：因為不要太熱，花蓮只有一個月的月均溫高於 28 度，所以第一名是花蓮因為他的放晴天數不太多，所以再找其他的地方。

A2092 箋：第一個是依據放晴天數，對嗎？

A2093 林：他喜歡溫暖有陽光的地方。

A2094 研：BB 先生怎麼找的？

A2095 箋：因為他喜歡溫暖有陽光的地方，所以依據放晴天數。

A2096 林：還有月均溫！

A2097 箋：哪還有根據月均溫？

A2098 林：有呀！溫暖。

A2099 箋：溫暖就是不要太熱。

A2100 林：月均溫沒有低於 18 度就是溫暖，他 0 呀，所以他是最好。

在循環三中可看見，雖然三人同時考慮多種條件來解題，但他們對解題決策的標準卻有爭議。因此，研究者接著對三人的評判標準，進一步提出相關的問題，希望藉以幫助他們統整其解題條件的判準。在對話 A2101 至 A2126 可知，三人再次對自己解題進行反省，並彼此對題目「條件」進行討論。從對話中可知，小林認為「溫暖」這條件已囊括其他條件（A2125），但小箋認為須同時看兩個條件（A2126），最後他們並未達成共識。當他們討論完題目條件後，小箋與小安又開始自己解題。但是，小林表示還在思考，只是在旁邊看另兩人做也因此再次討論解題的答案。

A2101 研：可是你們還是沒有告訴我這兩個條件是怎麼結合在一起？

A2102 林：條件上去後都有符合。

A2104 箋：先依靠放晴天數，再依靠月均溫。

A2107 研：因為他們都有兩、三個條件嘛，你是怎麼找到評判標準的？

A2108 林：BB 先生嘛，就是高雄，先看放晴天數。

A2109 研：為什麼先看放晴天數？

A2110 林：因為溫暖有陽光的地方，有陽光就是放晴，放晴就溫暖，所以先看放晴天數最高的。

A2111 研：放晴就是溫暖嗎？

A2112 林：反正就看放晴天數，接下來看溫度，因為溫暖有陽光，也就是說不需要太冷、、、。

A2113 研：現在你們有三個條件，溫暖、有陽光、不需要太冷，這三個條件誰要

從建模觀點探討學生數學解題決策之轉變及其影響因素

排第一？還是、、、。

A2120 研：你們討論一下。

A2121 林：先看第一個條件，後面的條件就不用看。

A2122 箋：他（BB）就只有兩個條件。

A2123 林：溫暖就不會冷，而且還有陽光。

A2124 箋：不要太冷就是溫暖。

A2125 林：不要太冷就是溫暖，所以不要太冷條件就不用看。

A2126 箋：把溫暖和放晴天數先排起來。

小箋經由重新解題後，發現自己的答案與之前的不同。當下，小安與小林也對小箋的答案提出質疑。於是，小箋開始與小安比對答案，發現關於 KK 先生的答案中，兩人的第一名的選擇是一樣，但第二名的選擇卻不同。為此，小箋馬上與小安討論，企圖想要了解對方的解題方法。對於小安的說明，小箋提出疑問且表示不認同。在兩人的僵持下，小林建議使用之前的解題方法，頓時小箋馬上認同小林的意見。使三人的討論達成共識。

A2145 箋：找出來了，可是，等一下、、、。

A2148 林：高雄，用之前的方法做。

A2150 箋：可是我算出來是台中，好奇怪？

A2151 安：不會吧，為什麼是台中？

A2152 林：BB 先生就是要溫暖、有陽光，就是高雄，就是把名次加起來，看誰排在前面。

A2153 箋：安，你的算法是怎樣？

A2154 安：算法就是，就這個減這個（指著記錄）

A2155 箋：為什麼就這個減這個？

A2156 安：月均溫低於 28 度的月數減去月均溫低於 18 度的月數。

A2157 研：這代表什麼？

A2158 安：減後數字，代表較溫暖。

A2159 箋：覺得怪怪的？

A2160 箋：這樣減起來就比台北差。

A2161 箋：我把太冷加太熱，再用 12 月減掉就是較適中的。

A2162 林：用之前的方式。

A2163 箋：林的方法較好。

然而，從小箋與小安的討論（對話 A2156 與 A2161）中發現，他們兩人的意思是一樣的，只是呈現的方式不同，但在此次的討論中，他們卻沒有深入的了解彼此的解題方式而使得討論的過程成為無意義。因此，當小林建議使用之前大家認同的解題方法時，兩人馬上贊成。

雖然，研究者請他們合作撰寫一份結論報告，但他們最後還是各自書寫結論。主要原因是，三人在討論寫作的過程中，對自己的解題進行批判性與反省性思考，引發他們再次調整自己的解題方式以及表徵方式。研究者將建循環三之解題決策歷程整理成圖 4

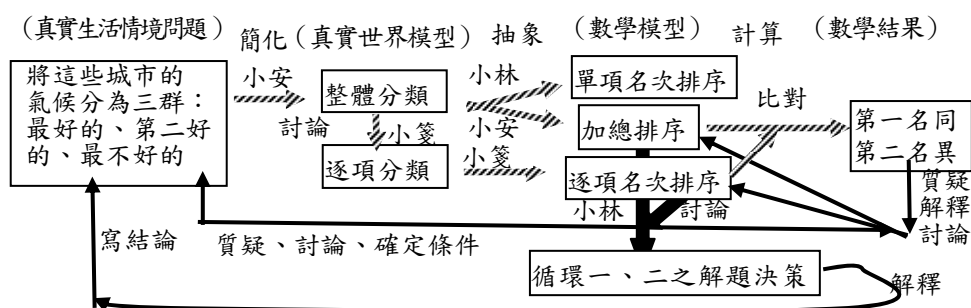


圖 4. 建循環三之解題決策歷程

(二) 小林、小箋、小安發展出的解題結論與表徵

經過三個建模循環的解題討論後，引發此三位學生各自發展自己的排序系統與表徵。雖然在建模循環的討論中三人有取得彼此的共識，但在最後各自撰寫的解題結論與表徵，卻不相同。將分別敘述如下：

1. 小林發展出的排序系統與表徵

從小林對自己記錄的解說可知，他分別根據「放晴天數」、「月均溫高於 28°C」、「月均溫低於 18°C」、「平均降雨量」這四種條件，逐項將城市分為三至四類。然後再依照條件需求，透過「符合－排除」條件的方式來求出答案。從他最後呈現的記錄可以發現，小林採用文字敘述來表徵他的排序系統，如表 5 示。

表 5
小林發展出的排序系統與表徵
(小林的結論記錄)

(小林的結論記錄)	(小林的解說)
<p>放晴 (天)</p> <p>1. 最多: 高雄 (264), 台南 (268), 台東 (256)</p> <p>2. 中等: 台中 (228), 嘉義 (242), 新竹 (234)</p> <p>3. 最少: 台北 (143), 宜蘭 (191), 花蓮 (218)</p> <p>月均溫 < 18°C (月數)</p> <p>1. 最多: 台北 (4個月), 新竹 (4個月), 台中 (3個月), 嘉義 (3個月), 宜蘭 (3個月)</p> <p>2. 中: 台南 (2個月)</p> <p>3. 中下: 花蓮 (1個月)</p> <p>4. 無: 高雄, 台東</p> <p>月均溫 > 28°C (月數)</p> <p>1. 最多: 台北, 台南 (4個月)</p> <p>2. 中: 高雄, 台東 (3個月)</p> <p>3. 中下: 新竹, 台中, 嘉義, 宜蘭 (2個月)</p> <p>4. 最少: 花蓮 (1個月)</p> <p>雨量 (mm)</p> <p>1. 最多: 台北 (3023), 台南 (3199), 宜蘭 (3330)</p> <p>2. 中等: 嘉義 (2975), 高雄 (2812), 花蓮 (2777)</p> <p>3. 最少: 新竹 (2384), 台東 (1577), 台中 (2575)</p>	<p>A3008 林：就用排序的方法，每個客人都要看的話就用排序的方法，每個城市像放晴、月均溫，就把它排序，分出最好的、中的、最差的。</p> <p>A3012 林：有九個城市我把大概它分為三類，像 BB 先生要溫暖有陽光，所以放晴天數要夠就選這個最多的地方，再繼續看它的條件，它不在忽下很多雨，所以降雨量部份就不用看，溫暖就是不可以太冷，就盡量選熱一點的地方，高雄、臺東月均溫都沒有低於 18 度，就高雄、臺東選一個，再看溫度高一點點，就這樣。</p> <p>A3046 林：我把前面抄上去，如果有兩個一樣再看數字來決定，這樣比較方便...排序就把全部的好壞都排出來。</p>

2. 小箋發展出的排序系統與表徵

經由討論後，小箋先依據題目提供的四種條件，逐項排序名次。接著，再將其排序結果，畫出一個檢索表。此檢索表，首先依據「放晴天數」來分類，接著依據「氣溫」來判斷，最後則再看「降雨量」，如表 6 示。從他最後呈現的記錄可以發現，小箋採用檢索表來表徵他的排序系統。

表 6
小箋發展出的排序系統與表徵

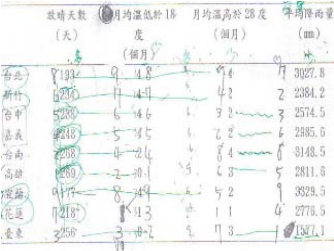
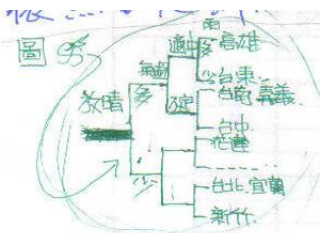
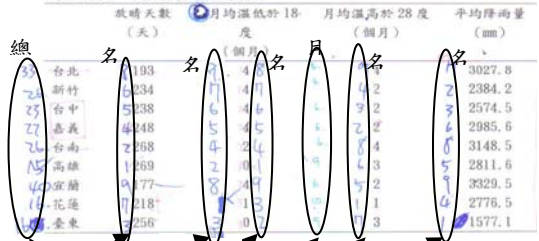
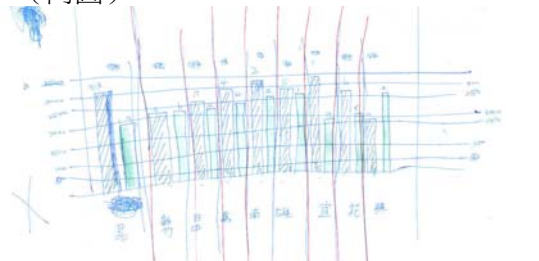
(小箋的結論記錄)	(小箋的解說)
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;">  </div> <div style="width: 45%;"> <p>(甲圖)</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;">  </div> <div style="width: 45%;"> <p>(乙圖)</p> </div> </div>	<p>A3026 箋：我把它（甲圖）做成檢索表（乙圖）。</p> <p>A3028 箋：第一個就是依據放晴天數多或少，如果客戶希望多的話就往多的就，下一個是依據氣溫，氣溫這個我分的較不好。</p> <p><經過三分鐘修改後></p> <p>A3038 箋：第一個依據是放晴嘛！如果他希望放晴天數較多，就往放晴天數較多那條走，第二個依據是氣溫，有中、冷、熱，他希望冷的話就往較冷那條走，接下是降雨量就這樣。</p>

表 7
小安發展出的排序系統與表徵

(小安的結論記錄)	(小安的解說)
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;">  <p>戊 = <28°C 月數 - <18°C 月數， 丙 依據戊 排名，甲 = 乙 + 丙 + 丁 + 己 + 庚</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>(丙圖)</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;">  </div> <div style="width: 45%;"> <p>(丁圖)</p> </div> </div>	<p>A2057 安：把這總合加起來。（如丙圖所示）</p> <p>A3013 安：把它變成長條圖，把月均溫和降雨量變成長條圖。</p> <p>A3015 安：黃色是降雨量，綠色是放晴天數。</p> <p>A3019 安：把它分成兩邊</p> <p>A3022 研：左邊的軸代表什麼？</p> <p>A3023 安：左邊的軸代表降雨量，右邊的軸是代表放晴天數。</p> <p>A3053 箋：然後呢？</p> <p>A3054 安：我也不知道？</p>

3.小安發展出的排序系統與表徵

最初，小安採用「名次加總」的方式來排序，他除了將題目中四種條件分項排名外，他又增加一項為「溫暖」，並將「溫暖」的月數定義為「月均溫低於 28°C」的月數減「月均溫低於 18°C」的月數，且依此排名。最後小安將各項的名次加總，來找出排名。

雖然小安以「名次加總」發展排序系統，但他最後以「放晴天數」與「平均降雨量」兩項目，在同一平面上繪製長條圖，並以左、右垂線各為一縱軸，分別代表「放晴天數」與「平均降雨量」。然而，當他畫完長條圖後，他卻表示自己也不知道這圖形有何用途。

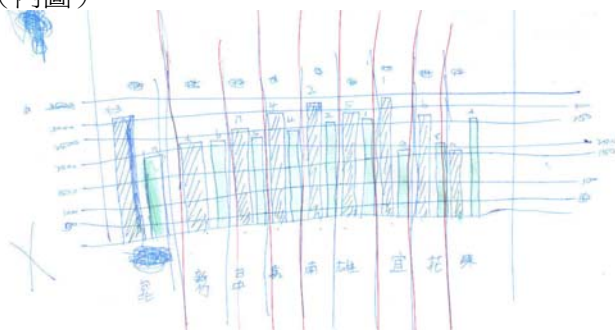
表 7
小安發展出的排序系統與表徵
(小安的結論記錄)

城市	放晴天數 (天)	月均溫低於 18°C (個月)	月均溫高於 28°C (個月)	平均降雨量 (mm)
台北	193	4	2	3027.8
新竹	234	4	2	2384.2
台中	238	4	2	2574.5
嘉義	248	4	2	2985.6
台南	258	2	4	3148.5
高雄	259	0	3	2811.6
宜蘭	277	4	2	3329.5
花蓮	218	1	1	2776.5
台東	256	0	3	1577.1

甲 = 總名次
 乙 = 放晴天數名次
 丙 = 月均溫低於 18°C 名次
 丁 = 月均溫高於 28°C 名次
 戊 = 溫暖名次
 己 = 平均降雨量名次
 庚 = 平均降雨量名次

$戊 = <28^{\circ}\text{C} \text{月數} - <18^{\circ}\text{C} \text{月數}$
 丙依據戊排名， $甲 = 乙 + 丙 + 丁 + 己 + 庚$

(丙圖)



(丁圖)

(小安的解說)

- A2057安：把這總合加起來。(如丙圖所示)
- A3013安：把它變成長條圖，把月均溫 and 降雨量變成長條圖。
- A3015安：黃色是降雨量，綠色是放晴天數。
- A3019安：把它分成兩邊
- A3022研：左邊的軸代表什麼？
- A3023安：左邊的軸代表降雨量，右邊的軸是代表放晴天數。
- A3053箋：然後呢？
- A3054安：我也不知道？

二、學生解題決策之轉變與影響其轉變之因素

研究者接續對學生在各建模循環中的解題決策歷程做橫向分析，發現學生解題決策之轉變與影響其轉變之因素，將分述如下：

(一) 對題目條件的選擇更多元：運用「單一」→「多種」條件，進行解題。

如表 8 所示，在建模循環一時，三人各自根據「單一」條件作為排序標準。然而，在討論中發現，彼此對題目條件的「定義」所持之看法不同，而進行辯論。經過「支持」自己主張之條件與「反駁」他人主張之條件之辯論後，使小箋對自己的解題決策產生了認知衝突，促其發生了概念改變。

由於建模循環一的討論，使三人歷經了正、反的辨證過程，導致三人對「他人」所提之條件的注意，因而他們在建模循環二，開始注意到題目中的「多種」條件，並運用其當作決策的標準。由於接續循環一的討論，因此毫無疑問地先直接討論「放晴天數」，再考慮其他因素。然而在建模循環三時，因再次從「多種」條件來進行分群，故啟動了對「多種」條件之間的比重與相關性進行討論。

雖然三人在每次的建模循環皆取得共識，但在最後各自撰寫的結論可以發現，小林雖然在決策方面，從「單一」轉變成採用「多種」條件解題，但並未將這些條件進行統整。探其原因可發現，其在循環一中呈現之解題記錄與解題討論內容不一致，在建模過程中較少提出自發性的想法，大多附和他人想法或從他人的觀點來發表自己的看法。在循環三中，他們對多種條件的解題決策標準出現有爭議，當研究者提出相關的問題供他們思考時，小安與小箋立即思考與嘗試解題，但小林卻表示自己仍在思考，只在旁邊觀看兩人的內容。

相較另外兩人，小箋在建模過程中所作的決策轉變最多，除了從「單一」轉變成採用「多種」條件解題外，也企圖將這些條件統整。從表八中可發現，三人討論所取得的共識，會影響小箋接下來的決策。探其原因可追溯小箋在討論時的參與情形。回顧在循環一中，小箋認真的參與「支持」與「反駁」的辯論，最後讓自己產生決策改變，也因此注意到其他的條件。在循環二的辯論中，進一步思考條件定義的明確性，在循環三中則與小安辯論多條件的統整方式。小箋除了認真的參與每一次的討論外，也在討論後馬上依當時的想法進行解題，因此在討論—解題的循環模式下，小箋一直再調整自己的想法。

在建模的過程中，雖然小安的發言次數沒有小箋與小林多，但從上述的分析可以發現，在討論的過程中小安扮演的角色，不是自發性提供意見，就是反駁他人的意見。

此外，他也同時進行解題來驗證自己的想法。在三個循環討論與最後的結論中可以發現，三人討論所取得的共識對他的影響也不大。

表 8

小林、小安、小箋在各建模循環中的解題決策歷程的轉變

建模 決策	循環一		循環二		循環三		各自最後 的結論
	初	共識	初	共識	初	共識	
小林	單條件 (晴天數)	單條件 (晴天數)	多條件 (晴天數、 溫度、 降雨量)	多條件 (晴天數、 溫度、 降雨量)	單條件分 類(囊括 其他條 件)	多條件各 自分類再 整合	多條件各 自分類未 整合
小安	單條件 (晴天數)	單條件 (晴天數)	多條件 (晴天數、 溫度、 降雨量)	多條件 (晴天數、 溫度、 降雨量)	整合多條 件分類	多條件各 自分類再 整合	整合分類 的多項條 件
小箋	單條件 (溫度)	單條件 (晴天數)	多條件 (晴天數、 溫度、 降雨量)	多條件 (晴天數、 溫度、 降雨量)	多條件各 項分類	多條件各 自分類再 整合	多條件逐 項依序分 類

(二) 對題目中條件的詮釋更精確—主觀的字面詮釋→確定定義與使用證據支撐

在建模循環一時，三人對題目內容的詮釋方式是主觀的且從字面上去解釋。例如，對 BB 先生所需的條件：「溫暖有陽光」，三人就有不同的詮釋。當小安提出「溫暖有陽光」的地方「應該」是高雄時 (A1008)，小箋認為「溫暖」「應該」是「不低於 18 度不高於 28 度」(A1009)，故而主張只需要依照「溫度」來判斷 (A1011)。但，小林卻認為要看「全部」的條件。再者，三人皆未注意到 BB 先生所要求的「不在乎是否下很多雨」。此也證明了數學上的不等式與在生活用語之間存在著落差。

在建模循環二階段，除了提出自己的意見外，也會使用一些理由來支持論點。例如，在討論過程中，小箋認為台南太熱，並補述「4 個月月均溫高於 28 度」作為支撐它的理由 (A1080)。到了書寫結論階段時，小安與小箋突然再次對題目中條件—「放晴」之定義提出疑問，並要求研究者對提供的資料做說明 (A1081、A1082)。由此可以發現，學生對條件的詮釋已逐漸嚴謹化，而合作討論記錄，是啟動他們更深入反思的原因之一。

因此，在建模循環三階段，在提出意見時，則從多項的條件來說明理由。例如，

當研究者提問為何認為台北是最差的城市時，小箋表示：「台北放晴天數只有 193 天，比其他的還要低，再加上台北一年中有 4 個月的月均溫低於 18 度，有 4 個月的月均溫高於 28 度，所以只有 4 個月的月均溫比較適中，所以最後一名」(A2033)。

(三) 對題目條件的使用更嚴謹－質性標準→量化標準

在建模循環一時，根據題目中的單一條件進行分類。有別於循環一，質性分類後再排序，在建模循環二運用「多種」條件做為評判標準時，小安與小箋決定先根據「放晴天數」來限定答案的範圍，並設定放晴天數需要 240 天以上才符合標準。到了循環三時，則嘗試將滿足各項條件的城市排序名次，透過數學運算加以處理。到了最後的結論，小安更透過量化運算，增設了另一條件－溫暖的月數，並依自設之定義為「月均溫低於 28 度的月數減去月均溫低於 18 度的月數」(A2156)，再將城市排序。而小箋是將「我把太冷加太熱，再用 12 月減掉」，認為此就是溫暖的月數 (A2161)，如圖 5 所示。

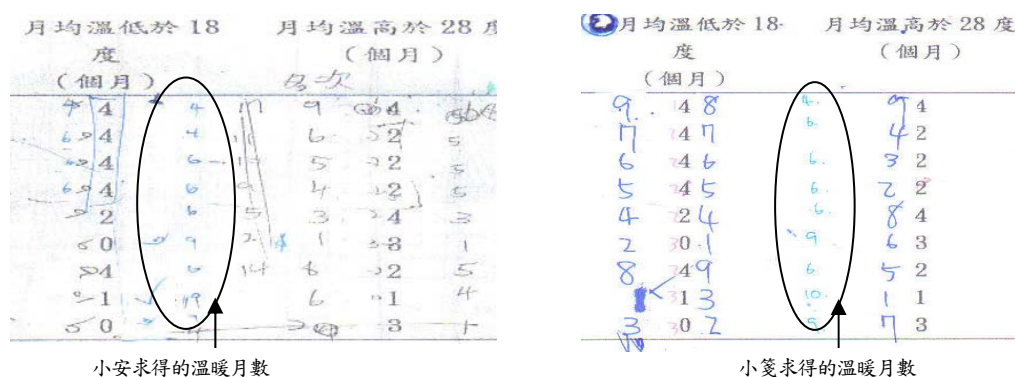


圖 5. 小安與小箋所求得的溫暖月數

伍、結論與建議

本研究之目的主要是，經由建模活動來探討學生數學解題決策之轉變及其影響因素，經由研究結果的分析與討論，得到的結論與建議如下：

一、研究結論

(一) 經過建模循環後，可以發現學生在數學解題過程中在作決策時會，

1. 從只注意局部的條件，逐漸演變成注意到全面性的條件。

誠如 Kehle 與 Lester (2003) 所主張，在建模循環中之簡化階段，與「決策」有關，決定哪些條件是可忽略。在本研究中，則進一步發現學生在決策時原本只考慮局部的單一條件，經由一串的建模討論後逐漸演變成注意到全面性的條件。

2. 逐漸使用證據支撐對題目中條件的詮釋，並先確定條件定義，而非起初對條件主觀的解釋。

Kilpatrick (1985) 認為在問題解決時，學生需設法運用一些數學概念、原理與方法來尋求答案。在本研究中，發現雖然學生起初主觀的進行解題，但經由建模討論後逐漸使用證據支撐對題目中條件的詮釋，並且會要求條件定義的嚴謹性。由此可知合作建模活動有助於學生數學解題能力之提升。

3. 從質性描述解題，逐漸演變成採用量化資料來解題。

有別於傳統「條件」狀態到「目標」狀態的解題模式 (Mayer, 1985)，建模問題提供更貼切日常生活情境的問題，供學生思考。雖然兒童的方法不是最迅速的或最好的，但應提供練習的機會給他們而非提供規則 (McIntosh, 1977)。從本研究可以發現學生原先只是透過質性描述來解題，經由一串的建模討論後逐漸演變成採用量化資料來解題。

(二) 經由建模討論過程，可以發現影響學生解題決策的轉變的因素有：

1. 「積極」參與正、反之辯證討論模式，可以引動其產生認知衝突而造成解題決策的改變。

本研究之個案—小箋積極參與建模討論，並為自己的主張加以辯護且企圖反駁他人的主張，也因歷經正、反之辯證歷程而引發其決策改變。然而另一個案—小林雖也參與討論，但他所提出的意見，大部分接續或附和他人的想法，因此到最後他所呈現的結論是未統整的。如 Cazden 所主張，將教室的談話 (discourse) 視為再概念化，意指學習者對正在討論的現象產生新的思考方式、分類方式、再概念化的方式，甚至重新脈絡化方式的方式 (蔡敏玲、彭海燕譯，2004)。在本研究中發現「積極」參與正、反之辯證討論模式可促其再概念化和重新脈絡化方式。

2. 透過書寫解題記錄，並共同討論其記錄，可促進學生更進一步思考「如何表達」與「如何解釋」想法。此也引動其產生認知衝突，造成解題決策的改變，進而引發另一個建模循環。

雖然 Lester (1980) 與 Schoenfeld (1985) 增加後設認知的觀點來探討解題歷程，但卻未強調書寫解題記錄對其後設認知的影響。雖然 Mayer (1992) 也強調解題歷程中的問題表徵，將其分為問題轉譯與問題整合，但卻未強調解題表徵對其解題歷程的影響。國內近幾年也開始重視數學寫作的研究，在數學解題方面，李虹儀 (2006) 研究發數學寫作對國中生解方程式應用問題有正向影響，但其所謂之數學寫作實為解題過程的輔助策略，未完成融入整個解題歷程中。然而，建模歷程實涉及內在概念系統、表徵系統與外在系統之間不斷地交互作用 (Lesh & Doerr, 2003)。故從本研究可以發現，當學生共同撰寫解題記錄並加以討論時，可促進學生更進一步思考「如何表達」與「如何解釋」想法。此也引動其產生認知衝突，造成解題決策的改變，進而引發另一個建模循環。

3. 開放式的題目，有別傳統應用問題，提供學生自由的解題與討論空間，使其經由逐漸調整解題策略，而影響下一循環的解題決策。

本研究所提供之建模問題，有別於傳統「條件」狀態到「目標」狀態的解題模式 (Mayer, 1985)，學生必須從資料中作決策，決定其解題方向。彼此所作的決策點不同，所產生的結果可能相同也可能不同。由於建模活動提供學生自由的解題與討論空間，因此學生可藉由討論逐漸釐清問題，並適時調整其題策略。由本研究也發現，學生討論的暫時結論，會影響他們在下一循環的解題決策。

二、建議

經過研究結論，研究者對數學教學與未來研究提出相關的建議：

(一) 對數學教學的建議

1. 由研究結果可發現，建模活動有助於學生解題能力的提升，使其解題決策更為嚴謹，因此建議數學教師進行數學解題教學時，可設計數學建模問供學生討論。
2. 由研究結果可發現，正、反之辯證討論模式是影響學生改變之一原因，因此建議數學教師進行教學討論時，可安排促進學生產生辯證之問題，以供其進一步思考。
3. 由此三位學生的轉變情形，建議數學教師進行建模教學或解題教學討論時，應考慮到不同類型的學生來設計活動。

(二) 對未來研究的建議

由學生的解題表徵，可以反應其經由建模循環討論後，各自的內化與轉變情形。本研究之三位受試者呈現出三種不同的轉變類型。因此建議：

1. 未來研究可考慮從不同學習風格或類型，來探討數學建模的成效，或兩者間的相互關係。
2. 未來研究探討如何在建模循環中，促進學生解題表徵之發展。

參考文獻

中文部份

- 吳依芳 (2003)。建模教學活動對國二學生學習線型函數概念之影響。未出版之碩士論文，國立臺灣師範大學數學研究所，台北。
- 李虹儀 (2006)。數學寫作對國中生解方程式應用問題的影響。未出版之碩士論文，國立臺灣師範大學數學系，台北。
- 林國源 (2004)。高中數學建模課程與實踐之研究。未出版之碩士論文，國立交通大學理學院網路學習碩士在職專班，新竹。
- 胡政德 (2006)。準教師數學建模歷程分析研究—以Voronoi圖為例。未出版之碩士論文，國立臺灣師範大學數學研究所，台北。
- 楊凱琳、林福來 (2006)。探討高中數學教學融入建模活動的支撐策略及促進參與教師反思的潛在機制。科學教育學刊，14 (4)，517-543。

外文部份

- Cazden, C. B. (1998)。教室言談：教與學的語言(蔡敏玲、彭海燕譯)。台北：心理。(原著出版於1978)。
- Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on student's mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 110-136.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. China Lectures, 9 Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 201.

- Izsak, A. (2003). "We want a statement that is always true": Criteria for good algebraic representations and the development of modeling knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(3),191.
- Kantowski, M. G. (1980). The use of heuristics in problem solving : *An exploratory study final report. National Science foundation project sed 77-18543* .
- Kehle, P. E., & Lester, F. K. (2003). A Semiotic Look at Modeling Behavior. In Lesh, R., & Doerr, H. M. (Ed.) *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*.
- Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 year of research on teaching Mathematical problem solving. In Silver, E. A (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical problem solving: multiple Research Perspectives*.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundation of a models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. In Lesh, R., & Doerr, H. M. (Ed.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 159-173).
- Lester, F. K. (1980). Research on mathematical problem solving in the elementary school. In R. J. Shumway (Eds.), *Research in mathematics education* (pp. 286-323). Reston, VA : NCTM.
- Lin, F. L. & Yang, K. L. (2005). Distinctive characteristics of mathematical thinking in a non-modeling friendly environment. *Teaching Mathematics and its Applications*, 24(2-3), 97-106.
- Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental Constructs in Mathematics Education*. London: RoutledgeFalmer.
- Mayer, R. E. (1985). *Educational psychology: a cognitive approach*. Boston: Little, Brown.
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. New York: W. H. Freeman and Company.
- McIntosh, A. (1977). When will they ever learn? *Forum*, 19(3), 92-5.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, new Jersey: Princeton University Press.
- Reed, S. K. (2000). Problem solving. In A. E. Kazdin (Ed.), *Encyclopedia of psychology* (Vol.8, pp. 71–75). Washington, DC: American Psychological Association and Oxford University Press.

從建模觀點探討學生數學解題決策之轉變及其影響因素

- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic.
- Sternberg, R.J. (2005). *認知心理學* (李玉琇、蔣文祁譯)。台北：雙葉。(原著出版於 1997)
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education*. Netherlands, Dordrecht: Reidel.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*. 54, 9-35.

文稿收件：2008 年 02 月 25 日

文稿修改：2008 年 05 月 17 日

接受刊登：2008 年 07 月 15 日

Factors Mediating Students' Decision Making in Mathematical Problem Solving: A Modeling Perspective

Hui-Ju Chen

Shian Leou

Teacher,

Professor,

Kaohsiung Municipal

National Kaohsiung

Hsin Hsing Senior High School

Normal University

Abstract

Decision making is crucial to successful mathematical problem solving. However it was neglected in traditional studies in problem solving which emphasized right conditions and strategies that students used to solve problems. But it is impossible to find the particular answer from some specific givens existed in our normal life. As a result, it is necessary to foster the capability. The viewpoint of modeling suggested solvers to solve problems through making adapt decision (Lesh & Doerr, 2003), and the process of modeling is related to decision making (Kehle & Lester, 2003). The objective of the is to inquire the translation of students' decision making in modeling activities and explored the reasons influencing the change.

According to the study, three types of translation can be found: selection and utilization from local to global conditions ; interpretation from subjective to objective view; representation from quality description to quantifying data. The reasons influencing above are : to engage in discussing actively; to record the thought of solving and to get feedbacks; to offer enough space for students to discuss. Finally, we proposed some suggestions for mathematical teaching and future research.

Key words: modeling, mathematical problem solving, decision making.