臺北市立萬芳高級中學 103 學年度數學科第一次代理教師甄選筆試試題

※ 作答說明

1. 本試卷共 10 題，各題獨立計分,每題 10 分,滿分 100 分。
2. 請詳列計算過程或理由於該題下方空白處，未列過程或理由者該題不予計分。

1.設 $a_1 < a_2 < a_3$ 且 b_1, b_2, b_3 皆爲正數，試證：方程式 $\dfrac{b_1}{x-a_1}+\dfrac{b_2}{x-a_2}+\dfrac{b_3}{x-a_3}=1$ 有三個相異實根.

2. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$，當 $n > 1$ 時，$a_n = a_{n-1} + n$。試問 $a_1, a_2, \cdots, a_{1999}$ 中個位數是 1 的共有多少項？

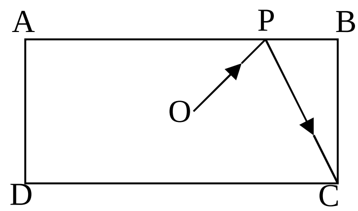
3. 設$a=\log_{2012}2013$，$b=\log_{2013}2014$，試比較a,b的大小.

4. 設一袋中有 20 顆球，分別標上 1 號至 20 號，現從袋中任意取出 8 顆球，觀察這 8 顆球的號碼，其中有一組四連號，有一組二連號，另外兩個號碼不連號，則共有多少種方法數？

5. 若 n 個資料 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 的算術平均數爲 5, 且 $3x_1{}^2-5, 3x_2{}^2-5, 3x_3{}^2-5, \cdots, 3x_n{}^2-5$ 的算術平均數爲 82,

試求 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 之標準差.

6. 如圖,有一張長 3 公尺，寬 1.6 公尺的撞球桌 $ABCD$ ，現在將位於撞球桌正中心 O 點的球往右上方打出去，碰到邊上的 P 點反彈一次之後順利進到撞球桌右下角 C 點的球袋內，若∠OPC= θ , 試求 $\cos\theta$ 之值.



7. 設 F_1, F_2 爲曲線 Γ_1 : $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦點, 若 P 是曲線 Γ_2 : $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 與 Γ_1 的一個交點,

試求 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$.

8. 設一平面 E 之法向量 $\vec{n}=(-1,2,1)$, 若有一光線沿向量 $\vec{b}=(2,-1,2)$的方向射入平面 E, 試求反射線方向上的單位向量.

9. 設Δ OAB 之重心為 G, 過 G 作一直線與$\overline{OA},\overline{OB}$分別交於 P,Q 兩點, 若$\overrightarrow{OP}=h\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OB}$,

試求$\dfrac{1}{h}+\dfrac{1}{k}$之值.

10. 設平面上有Δ ABC 與ΔPQR兩個三角形, 若$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{CA}$,

$\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{RB}+3\overrightarrow{RC}=\overrightarrow{AB}$, 試求$\Delta$ ABC 與ΔPQR之面積比.