臺北市立第一女子高級中學 101 學年度第二次教師甄選數學科試題卷

一、 填充題(每格 10 分)

1. 設空間中一直線 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-k}{2}=\dfrac{z-4}{3}$，其中 k 為實數。考慮在所有可能的 k 值之下，

   點 $P(1,0,3)$ 到直線 L 距離的最小值為________。答：$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

2. 設複數 $z=\cos\dfrac{2\pi}{17}+i\sin\dfrac{2\pi}{17}$，$\bar{z}$ 為 z 的共軛複數。若定義函數 $f(x)=\dfrac{\sum_{k=1}^{100}x^k+1+z}{x^{101}}=\dfrac{x^{100}+x^{99}+\cdots+x+1+z}{x^{101}}$，

   則 $f(1+\bar{z})$ 為_____________。答：$\cos\dfrac{2\pi}{17}+i\sin\dfrac{2\pi}{17}$

3. 設 n 為自然數，$S_n=3+5+7+...+(2n+1)$，則 $f(n)=\dfrac{S_n}{(n+25)S_{n+2}}$ 的最大值為_________。 答: $\dfrac{1}{49}$

4. 已知 O 為原點，A, B 為 x 軸上相異二點且 $\overline{OA}=\overline{OB}$，平面上有一點 P 使得 ΔPAB 面積為 1，且

   $\tan(\angle PAB)=\dfrac{1}{2}$，$\tan(\angle PBA)=-2$，則以 A、B 為焦點且過 P 的橢圓方程式為___________。

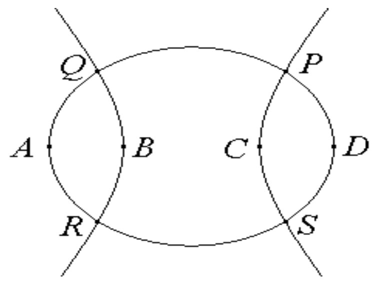
答: $\dfrac{4}{15}x^2+\dfrac{1}{3}y^2=1$

5. 已知 $f(x)=x^4+ax^2+x+1$ 於區間 $[0,\infty)$ 為遞增函數，則實數 a 的範圍為___________。

答: $a\ge -\dfrac{3}{2}$

6. 如圖，一橢圓與一雙曲線交於 P, Q, R, S 四點，其中點 A, D 為橢圓的長軸頂點亦為雙曲線的焦點；點 B, C 為雙曲線的貫軸頂點亦為橢圓的焦點。

   若 P, Q, R, S 可作為正方形的四個頂點，則 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$ 之值為_________。



答: $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

7. 圓 C：$x^2+y^2-24x-28y-36=0$ 內有一點 $Q(4,2)$，過 Q 做直角三角形 AQB 交圓於 A、B 兩點，

   且 $\angle AQB=90^\circ$，若 $\overline{AB}$ 的中點為 P，則 P 的軌跡方程式為_____________。

答: $x^2+y^2-16x-16y-8=0$

8. <u>小綠</u>參加大學指定科目考試時，題目卷中有關多選題得分敘述如下---「多選題的每題有四個選項，其中至少有一個是**正確**的選項。請選出正確的選項，畫記在答案卡之解答欄。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者得 8 分，答錯一個選項者得 4 分，所有選項均未作答或答錯多於一個選項者，該題以 0 分計算。」若<u>小綠</u>此題有作答，請你算算看她此題得分的期望值為_________。答: $\dfrac{22}{15}$