

國立新化高級中學101學年度第一次專任及代理教師甄選初試數學科試題

一 填充題：每格4分

1. 設 $a_n = 2^{n-1}$ ， n 是正整數，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2^{a_1})(1+2^{a_2})(1+2^{a_3}) \cdots (1+2^{a_n})}{2^{a_1+a_2+\cdots+a_n}} = \underline{4}$ 。

2. 設 a 為整數，若多項式 $f(x) = (x-2012)(x-2010)(x-a) - 48$ 有整係數一次因式，試求 $a = \underline{1997 \text{ 或 } 1993 \text{ 或 } 2017 \text{ 或 } 2002 \text{ 或 } 2003 \text{ 或 } 2004 \text{ 或 } 2008 \text{ 或 } 2014 \text{ 或 } 2059}$ 。

3. 在 1 與 19 間插入 $2n$ 個數，使其成為 $(2n+2)$ 項之等差數列，設公差為 d ，若此數列前 $n+1$ 項之和與後 $n+1$ 項之和的比為 1:3，求數對 $(n, d) = \underline{(4, 2)}$ 。

4. 從集合 $\{2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{25}\}$ 中任意選取兩個不同的 a 及 b 。求 $\log_a b$ 為整數的機率 = $\frac{31}{300}$ 。

5. 甲乙兩人分別解同一個三元一次聯立方程組
$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+4y+az=-1 \\ 2x+10y+5z=c \end{cases}$$
，甲不小心抄錯了數字 a ，解得方

程組有無限多解；乙不小心抄錯 c ，解得方程組的解為 $x=4$ ， $y=-2$ ， $z=1$ ，則此方程組真正的解為 $\underline{(-3, 2, 0)}$ 。

6. 附表為某抽樣的六位同學在智育(x)與體育(y)的分數(採十分制):

編號	智育	體育
1	6	5
2	6	6
3	8	7
4	9	7
5	6	4
6	7	7

求體育(y)對智育(x)的迴歸式 = $\underline{y=0.75+0.75x}$ 。

7. x, y 為實數，求 $\sqrt{(x-4)^2+9} + \sqrt{(y-7)^2+1} + \sqrt{x^2+y^2}$ 之最小值 = $\underline{5\sqrt{5}}$ 。

8. a, b, c 為相異定實數，且 $f(x) = \frac{a(x+a)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(x+b)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c(x+c)^2}{(c-a)(c-b)}$ ，求 $f(-\frac{a+b+c}{2})$
 = 0。

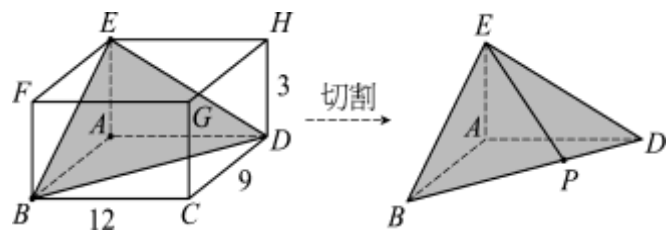
9. 臺灣高鐵從第一車到第 12 車共有 12 節車廂，為了加強服務乘客，要指定其中四節車廂設置自動販賣機。若設置自動販賣機的 4 節車廂要兩兩不相銜接且第 6 車為商務車廂必定設置，則共有 40 種方法。

10. 如右圖所示，長方體 $ABCD-EFGH$ 中 $\overline{BC}=12$ ， $\overline{CD}=9$ ， $\overline{DH}=3$ 。現在將長方體 $ABCD-EFGH$

沿平面 BDE 切割成兩個立體圖形，
 其中一個為四面體 $E-ABD$ ，

若點 P 在 \overline{BD} 上且 $\overline{BP}:\overline{PD}=2:1$ ，

求 \overline{PE} 長度為 $\sqrt{82}$ 。



11. 兩物體 A 與 B 經由一系列步驟同時等速在座標平面上移動，每次移動一個單位。物體 A 從 $(0,0)$ 開始移動，且每一步驟是向右或向上，兩者機率一樣。物體 B 從 $(5,7)$ 開始移動，且每一步驟是向左或向下，兩者機率一樣，則兩物體 A 與 B 相遇的機率為 $\frac{397}{2048}$ 。

12. 連續擲一個均勻公正骰子兩次。第一次出現 x 點，第二次出現 y 點，求 $\frac{x+y-|x-y|}{2}$ 之

期望值 = $\frac{91}{36}$ 。

13. 若 $x^4 + x + 1 = 0$ 之四根為 r_1, r_2, r_3, r_4 ，又 $p(x) = x^2 - 2$ ，求 $p(r_1) \times p(r_2) \times p(r_3) \times p(r_4)$

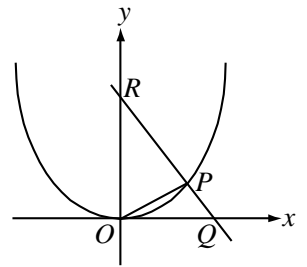
= 23。

14. 過(0, 0)恰有三相異直線與 $y = x^3 + ax^2 + 1$ 相切, 則 a 之範圍為 $a > 3$.

15. 設 z_1, z_2 為複數, $|z_1| = 3, |z_2| = 5$, 且 $|z_1 + z_2| = 7$, 則 $(\frac{z_2}{z_1})^3$ 之值為 $-\frac{125}{27}$ (化成最簡分數)。

16. 二數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 具有 $a_1 = 1, b_1 = 1$, 且 $\forall n \in N$,
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{cases}$$
 . 求 $a_n =$
 $2^{n+1} - 3^n$.

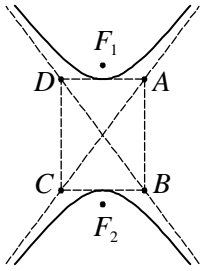
17. 如右圖設 $a > 0$, 點 $P(3a, a^2)$ 在 $\Gamma: y = \frac{1}{9}x^2$ 上, 點 Q 在 x 軸正向上, 且 $\overline{OP} = \overline{OQ}$, 直線 \overrightarrow{PQ} 交 y 軸於 R 點, 當 P 沿曲線 Γ 趨近於原點時, 試求點 R 的極限位置坐標為 $(0, 18)$.



18. $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, 且 $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c$, 若 $\forall x \in R$, 恆有 $ax^2 + bx + c \geq 0$, 求 $\angle A$ 之最大值 = 75° .

19. $\triangle ABC$ 中, $A(4,0,0), B(0,4,0), C(0,0,4)$, M 為 \overline{BC} 中點, 今將 C 點沿 \overline{AM} 對折至 C' 點使 $\overline{BC'} = 2\sqrt{2}$, 則 C' 點坐標為 $(\sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ 或 $(-\sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$.

20. F_1, F_2 為圖中雙曲線 Γ 的兩個焦點, $ABCD$ 為矩形, 兩直線 AC, BD 為 Γ 的漸近線. 若有一點 P 到兩漸近線的距離都是 8, 且 P 不在貫軸上, 又 $\overline{AB} = 8, \overline{AD} = 6$, 求 $\triangle PF_1F_2$ 的面積 = 50 .



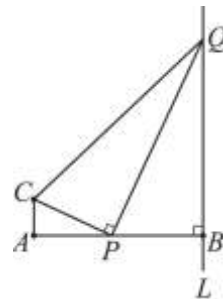
21. 某籃球選手經常作罰球線投籃練習，依過去經驗，當他前一球投進時，下一球的命中率為 $\frac{4}{5}$ ；當他前一球不進時，下一球的命中率為 $\frac{3}{5}$ 。設此選手第一球投進，試求第 n 球投進的機率為 $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ 。(以 n 表示)

22. 有一箱子內一開始裝有 2 個白球，曉明從箱子內玩抽球遊戲，每一次曉明從箱子中任取一球，取完球後再擲一骰子，若出現 3 的倍數的點數，則另取一個黑球與所抽出的球交換並將黑球放入箱子內，否則另取一個白球與所抽出的球交換並將白球放入箱子內，使箱子內仍保持 2 個球，再做下一次抽取，求曉明抽很多次後，箱子內有 2 個白球的機率 = $\frac{4}{9}$ 。

23. 如圖， $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ 且 $\overline{AB} \perp L$ 於 B ， $\overline{AB} = 14$ ， $\overline{AC} = 3$ ，

P 、 Q 分別為 \overline{AB} 、 L 上的動點，滿足 $\angle CPQ = 90^\circ$ ，

求 $\triangle CPQ$ 的最大面積為 75。



二 申論題(8%)

高中數學中經常有“求極值”問題，請略述各種方法並舉例說明之如：

- (1) 配方法求極值：若 $f(x) = 2(x-2)^2 - 5$ 則當 $x=2$ 時 $f(x)$ 有最小值 -5
 (2)

