

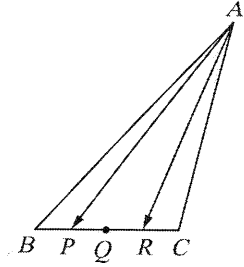
國立彰化高級中學 103 學年度第一次教師甄選【數學科】試題

※請作答於答案卷上，需有計算過程否則不予計分※

※題號 1~13，每題 5 分；題號 14~18，每題 7 分。※

1. 如下圖所示，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{CA} = 6$ ，

且  $P, Q, R$  為  $\overline{BC}$  的四等分點，則  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} =$  \_\_\_\_\_。



2. 設  $n$  為自然數， $(2 + \sqrt{5})^n = x_n + y_n\sqrt{5}$ ，其中  $x_n, y_n$  為正整數，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$  之值為\_\_\_\_\_。

3. 將自然數按下表的方式排列，從上到下第  $i$  列，從左至右第  $j$  行的數記為  $f(i, j)$ ，例如  $f(3, 4) = 18$ ，試求  $f(45, 45) =$ \_\_\_\_\_。

1	2	4	7	11	16	22	...
3	5	8	12	17	23	...	
6	9	13	18	24	...		
10	14	19	25	...			
15	20	26	...				
21	27	...					
28	...						
...							

4.  $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ ，則  $f(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}) =$ \_\_\_\_\_。

5. 複數平面上，點  $A, B, C$  分別對應到複數  $z_1, z_2, z_3$ ，若  $|z_1 + 3i| = |z_1 - 2 - i|$ ，

$z_2 = z_1 \cdot (-1 + \sqrt{3}i)$ ， $z_3 = z_1 \cdot 4i$ ，則  $\triangle ABC$  的最小面積為\_\_\_\_\_。(請化為最簡根式)

6. 空間中，平面  $E: x + 2y + 2z = 9$  將球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 25$  的內部分成兩部分，其中體積較小的部分稱為球冠，此球冠的體積為\_\_\_\_\_。

7. 有三個水桶  $A, B, C$ ，其含水量分別為  $a, b, c$ 。現在依  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow \dots$  的順序，將前一個水桶的水倒一半至後一個水桶。規定每一回合為  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ ，若  $n$  回合後會趨近平衡狀態，則其平衡狀態時，水桶  $A$  中的水量為何？(試以  $a, b, c$  表示)

8.  $|\log_2 x| = ax + b$  有三相異解，且這三個解的比為  $1:2:3$ ，試求數對  $(a, b)$  的值。

9. 設  $\overline{AB} = 2$ ，在以  $\overline{AB}$  為直徑的半圓上有動點  $P$ ，記  $\overline{AB}$  的中點為  $O$ ， $\angle PAO = \theta$ 。

從點  $B$  向  $\overline{OP}$  作垂線，垂足記為  $M$ 。當  $\theta$  在  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  範圍內變化時， $\triangle OBM$  的面積記為  $S_1$ ， $\triangle ABP$  的面積記為  $S_2$ ，求以  $\theta$  表出  $S_1, S_2$ 。(對其中一個得 3 分，全對得 5 分)

10.  $a \in \mathbb{R}$ ， $f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax - 3a$  若  $f(x) = 0$  有三個相異實根，試求  $a$  的範圍為\_\_\_\_\_

11.  $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$  表三相異平面， $(2,3,4)$  為其一交點，

若  $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$  亦表三相異平面， $(3,4,7)$  為其一交點，

試問方程組  $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$  之解為\_\_\_\_\_

12. 已知  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \{-1, 0, 1\}$ ，試問  $a_0 + 3a_1 + 3^2a_2 + 3^3a_3 + 3^4a_4 + 3^5a_5$  的值為正整數者，共有\_\_\_\_\_個。

13. 試求  $\left[ \frac{10^{2001}}{10^{667} + 2002} \right]$  的末四位數，其中  $[x]$  表示小於或等於  $x$  的最大整數？

14. 在箱中放著七張卡片，其上編有從 1 到 7 的數字，每張有一個各不相同的數字。從箱中隨意地取出 1 張卡片，再放回箱中，這樣的試驗反覆進行  $n$  次，並記  $n$  次取出的卡片上數字的總和為  $S_n$ ，設  $S_n = 4k + 1$  ( $k$  是整數) 的機率為  $P_n$ ，求用  $P_n$  表出  $P_{n+1}$ 。

15. 設  $\triangle ABC$  之三邊長為  $\overline{AB} = 3, \overline{BC} = 4, \overline{CA} = 5$ ，若  $\triangle ABC$  內部一點  $P$  到  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$  三邊之距離

依次為  $x, y, z$  求行列式  $\begin{vmatrix} x^2 + 2 & yx & zx \\ xy & y^2 + 2 & zy \\ xy & yz & z^2 + 2 \end{vmatrix}$  之最小值為\_\_\_\_\_。

16. 若  $\begin{cases} a + b = 1 \\ ax + by = -1 \\ ax^2 + by^2 = -5 \\ ax^3 + by^3 = -13 \end{cases}$ ，求  $ax^5 + by^5$  之值為\_\_\_\_\_。

17. 若  $s$  和  $t$  為任意實數，則  $(s + 7 - 5|\cos t|)^2 + (s - 3|\sin t|)^2$  之最小值為\_\_\_\_\_

18. 設圓的內接 12 邊形有六條邊長為  $a$ ，六條邊長為  $b$ ，則此 12 邊形的面積為\_\_\_\_\_。(試以  $a, b$  表示)