國立台南第二高級中學 101 學年度教師甄選筆試數學科試題卷

一.填充題：每格 7 分

1. $\tan 149^\circ \cdot \tan 29^\circ + \tan 89^\circ \cdot \tan 149^\circ + \tan 89^\circ \cdot \tan 29^\circ =$ ？

2. 設平面上的線性變換 f，將兩點 $(1,2)$、$(2,3)$ 分別變換爲 $(2,3)$、$(4,5)$，若將 $P(1,-100)$ 用線性變換 f 接連進行多次變換，試求 P 點首次被變換到第一象限的變換次數 $n=$ ？

3. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 2\end{bmatrix}$，且 X、Y 均爲二階方陣，滿足 $X+Y=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，$XY=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$，$aX+bY=A$，其中 $a>b$，a、b 爲常數，則 $X^n=$ ？

4. 甲、乙二人輪流擲一枚均勻的硬幣，誰先擲出正面，誰獲勝，如此稱爲一局，他們連玩了數局，並規定前一局的輸家下一局先擲，若甲第一局先擲，則甲第六局獲勝的機率爲？

5. 給定矩陣 $M=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1+a^2} & -\dfrac{a}{1+a^2}\\ \dfrac{a}{1+a^2} & \dfrac{1}{1+a^2}\end{bmatrix}$，$a>0$，規定 $P_n=(x_n, y_n)$，且 $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，

   $\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$， 求△ $P_1P_2P_3$ 面積的最大值爲？

6. 將 $(x-2y+3z-4u)^{40}-(x+2y-3z-4u)^{40}$ 展開後並將同類項合併，則會有幾種不同類項？

7. [x]表示不大於 x 的最大整數(高斯符號)，試求[$(\sqrt{3}+1)^8$]= ？

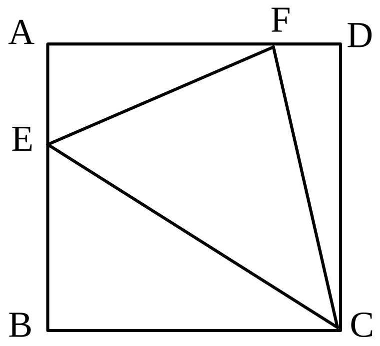
8. x_i 爲整數且-1≤x_i≤2，$x_1+x_2+\ldots+x_{2012}=19$，$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2012}^2=219$，若 $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_{2012}^3$ 最大值爲M、最小值爲m，則數對(M,m)爲何？

9. 化簡 $\dfrac{\tan 20^\circ}{2\sec 20^\circ+1-4\cos 20^\circ}=$ ？

10. 函數 f(x)滿足 $f(x)+f(\dfrac{x-1}{x})=\dfrac{1+x+x^2}{x}$，試求 $\sum_{k=2}^{100} f(k)=$ ？

二.計算證明題：每題 10 分

1. 正方形 ABCD 邊長爲 5，於 $\overline{AB}$、$\overline{AD}$ 上分別取一點 E、F，已知 $\overline{EF}=4, \sin\angle ECF=\frac{3}{5}$，試求 ΔECF 面積=？



2. z 爲複數，試解方程式 $(z+1+10i)(z+1+11i)(z+1+13i)=-3570i$ 。

3. 設△ABC 爲任意三角形，以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 各爲一邊向外各作一正三角形，分別爲△ABD、△BCE、△CAF。証明：△ABD、△BCE、△CAF 的重心 G_1、G_2、G_3 形成的三角形爲正三角形。