

台北市立景美女高 102 學年度數學科教師甄選試卷

(共十四大題，每題 8 分，請在答案卷上標明題號，並詳列每題計算過程及證明，否則不予計分)

1.(1)將「BOBOCOOL」八個英文字母排成一列，則同字不相鄰的排法有幾種？

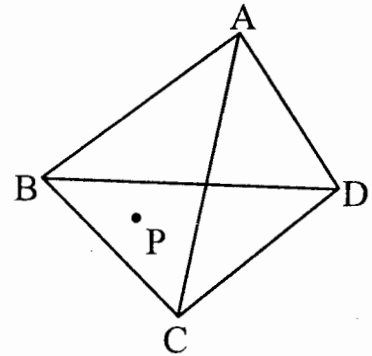
(2)袋中有 2 顆紅球，3 顆白球與 4 顆黑球，今從袋中每次取一球，取後不放回，試求紅球先取完之機率=?

2.試求出所有整數 a,b,c 使得 $\frac{36}{385} = \frac{a}{5} + \frac{b}{7} + \frac{c}{11}$, 且 $|a| < 5, |b| < 7, |c| < 11$

3.在 xy 平面上有一動點 P，當 P 在 x 軸運動時，其速度為每秒 2 單位，但在 x 軸以外的區域運動時，其速度為每秒 1 單位，若欲使 P 點在最短時間內自 A(0,1)，運動到 B(2,0)時，其路徑為由 A 出發，先至 x 軸上一點 Q(a,0)，再由 Q 直接到 B，求 a 的值為？

4.自 1, 2, 3, ..., 9 等九個數中任取相異四數排成四位數。從這些四位數中任取一組，當所取的四位數是 99 的倍數時，可得相同數目的獎金，則期望值為何？

5.正四面體 A-BCD 之邊長 $\overline{AB} = 6$ ，若 $P \in$ 平面 BCD，如圖所示，求 P 點到平面 ABC，平面 ACD，平面 ABD 之距離的和=?



6.設兩數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ 及 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{100}$ 滿足 $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2b_{n+1} \\ b_{n+1} = a_{n+1} - 3b_n \end{cases}, n=1, 2, 3, \dots, 99$

(1)試求 2×2 階矩陣 A，使得 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, n=1, 2, 3, \dots, 99$ (2)已知 $a_{99} = 3^{50}, b_{100} = 4 \cdot 3^{49}$ ，試求 a_1 及 b_1 之值

7.設 $x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x + k = 0$ 有二根和為 1，求：(1)k=? (2)方程式的所有解為何？

8.若 $0 \leq x, y \leq 2\pi$ ，試求 $\sin x \cdot \sin(x+y) \geq 0$ 所表示區域的面積？

9.令 $\omega = \cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6}$ ， $\alpha = 1+i$ ， $p_k = \omega^k + \alpha$ ， $q_k = \omega^k \cdot \alpha$ ， $k=1, 2, 3, \dots, 6$

(1)求在複數平面六邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 的面積？ (2)求在複數平面六邊形 $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ 的面積？

10.已知某函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = a$ (定值)，試問以下選項何者正確或錯誤？請說明原因？

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ (2) $(x-2) \mid f(x)$ (3) $f(x)$ 在 $x=2$ 連續 (4) $f(x)$ 在 $x=2$ 可微分

11.求兩個球體 $x^2 + y^2 + z^2 + x \leq \frac{3}{4}$ 與 $x^2 + y^2 + z^2 - x \leq \frac{3}{4}$ 相交部分的體積為何？

12.試求下列積分值：

(1) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} dx = ?$ (2) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}} dx = ?$

13.試利用 $C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + \dots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$

證明： $C_1^n + 2^2C_2^n + 3^2C_3^n + \dots + n^2C_n^n = n \cdot (n+1)2^{n-2}$

14.已知一圓錐曲線： $x^2 - 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}(x+y) = 0$ ，將坐標軸旋轉 45° ，

(1)求此曲線之新方程式為何？ (2)此圖形之正焦弦長為？