臺北市立明倫高級中學 102 學年度第 1 次專任教師甄選數學科筆試試題

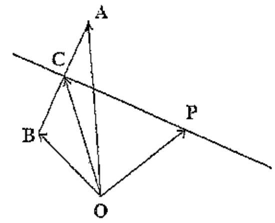
<注意> 共有 19 題，第 1~6 題，每題 5 分；第 7~17 題，每題 6 分；第 18~19 題每題 12 分；

請標明題號，將計算證明過程及答案寫在答案卷上

01. 觀察五架公共電話，以 $P(n)$ 表示有 n 架已在使用之機率，我們發現若 $0\le n\le 5$，則 $P(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n P(0)$；若 $n\ge 6$ 時，則 $P(n)=0$，則五架公共電話皆有人在使用的機率為？

02. 設平行四邊形 $ABCD$，E 在 $\overline{AD}$ 上，$\overline{AE}=2\overline{ED}$，$F$ 在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{AF}=3\overline{FB}$，若 $\overline{CF}$ 與 $\overline{BE}$ 交於 P 點，且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x,y)=$？

03. 有一光束由點 $P(4,2,-1)$ 前進到鏡面 M 上的點 $A(1,2,3)$ 反射後，通過另一點 $Q(7,-6,3)$，則鏡面 M 的方程式為？



04. 如圖，O、A、B 是平面上的三點，設 P 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線 CP 上的任一點，若 $|\overrightarrow{OA}|=4$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，則 $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=$？

05. 在 $\triangle ABC$ 中，三中線長分別為 $m_a=13, m_b=14, m_c=15$，求 $\triangle ABC$ 之面積？

06. 拋物線上有焦弦 $\overline{CD}$ 通過焦點 F，若 $\overline{CF}=2$，$\overline{DF}=5$，則此拋物線的正焦弦長為？

07. 地面(設為 xy 平面)上有大小兩飛碟球，大飛碟球球面方程式為 $S_1:(x-4)^2+(y-2)^2+(z-9)^2=81$，小飛碟球球面方程式為 $S_2:(x-11)^2+(y+22)^2+(z-4)^2=16$，若兩飛碟球在地面(即 xy 平面)上滾動，大飛碟球每秒滾動 2 單位，小飛碟球每秒滾動 3 單位，試問最快幾秒後兩飛碟球會相撞？

08. 已知兩複數 z_1 與 z_2 滿足 $|2z_1-10|=|3z_1+30i|$，$|iz_2-15|=4$，則 $|z_1-z_2|$ 的可能最大值為？

09. 設 m 為實數，已知四次方程式 $3x^4-4mx^3+1=0$ 無實根，求 m 的範圍。

10. 若 $f(x)=2(3x-2)^7-4(3x-2)^6-61(3x-2)^5+47(3x-2)^4+8(3x-2)^3-4(3x-2)^2+28(3x-2)-8$，則
(1) $f(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為？ (2) $f(x)$ 的奇次項係數和為？ (本題每小題 2 分)

11. 兩變數 X 與 Y 的 n 筆樣本資料 $(x_1,y_1)\sim(x_n,y_n)$，我們利用最小平方法求出 Y 對 X 的迴歸直線的過程中，欲使 $f(a,b)=(a+8b-11)^2+(a+9b-12)^2+(a+11b-8)^2+(a+12b-9)^2$ 有最小值，則
(1)此時的數對 $(n,a,b)=$？ (2) Y 對 X 的迴歸直線為何？ (3) 兩變數 X 與 Y 的相關係數為何？

12. 暑期輔導期間，高三導師想要規劃班級的自習課使用，輔導課一週五天，自習時段每天有兩個時段，如下圖一所示：
每天有兩個時段，每個時段只安排一科，每天安排兩個不同科目。
若國文、英文、數學各兩個時段，物理、化學、生物、地科各佔一個時段，則導師可以有幾種不同的安排方式？

317	一	二	三	四	五
早自習					
第七節					

13. 設 a,b,c 皆為正實數，試證明 $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\ge\frac{a+b+c}{3}$

14. 證明：在坐標平面上，點 $P(x_0,y_0)$ 到直線 $L:ax+by+c=0$ 的距離為 $d(P,L)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

15. 設 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$，求 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=$？

16. 令 $A=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{-1,0,1\}\}$，若有 k 個正三角形其頂點 (x,y,z) 都在 A 內，有 t 個正四面體其頂點 (x,y,z) 都在 A 內，則 $k=$？，$t=$？

17. 一般老師教學時，遇到「求過 $x^2+y^2-4x-28=0$ 與 $x^2+y^2-4x-20y+52=0$ 兩圓交點，且過(1, 1)之圓方程式為？」題目，多使用圓系方程，假設所求之圓為 $(x^2+y^2-4x-20y+52)+k(x^2+y^2-4x-28)=0$，其中 k 為任意實數。請問您，若有同學提問說：為何可以這樣假設？此時，您會使用最淺顯易懂的說明方式為何？請說明之

18. 給定直線 $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 及一點 $P(1,6,-2)$，試用各種不同的方法，求直線 L 上的一點 Q 的坐標，使得 $\overline{PQ}$ 為最小，並求出最小值。(說明：每種不同的方法可得 4 分，超過 12 分者，以 12 分計。)

19. 設 x 為任意實數，若 $k=\frac{\sin x+3}{\cos x+2}$，試用各種不同的方法，求 k 值的範圍。
(說明：每種不同的方法可得 4 分，超過 12 分者，以 12 分計。)

臺北市立明倫高級中學 102 學年度第 1 次專任教師甄選數學科筆試試題參考答案卷

1. $\frac{1}{63}$　2. $(\frac{9}{14},\frac{1}{7})$　3. $3x-2y-2z=-7$　4. 6　5. 112　6. $\frac{13}{5}$　7. $\frac{40}{7}$

8. $9+6\sqrt{5}$　9. $-1<m<1$　10. (1) 2　(2) 3　11. (1) $(4,18,\frac{-4}{5})$　(2) $y=18-\frac{4}{5}x$　(3) $r=-\frac{4}{5}$

12. 322560　13. 略　14. 略　15. 2　16. $k=80, t=18$　17. 略

18. $Q(-1,4,-1)$，$\overline{PQ}$最小值為 3　19. $\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\le k\le\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$