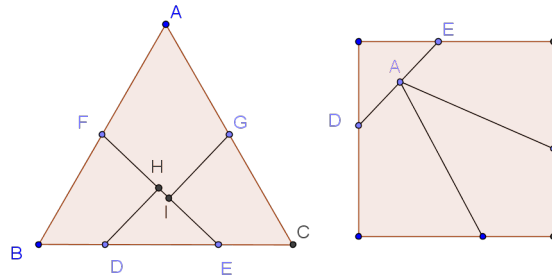


填充題(題號可能錯誤) (每題 7分, 共84分)

1. 設 $f(x)$ 為一 317 次多項式滿足 $f(k) = \frac{1}{k}, k = 1, 2, 3, \dots, 318$, 則 $f(320) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 平面上坐標上, Γ 為所有的點 P 滿足到直線 $x = 4$ 與 $(1, 0)$ 的距離和為 5 之曲線。試求 b 的範圍, 使得 Γ 上恰有三組點, 關於點 $(b, 0)$ 對稱。
3. 若函數 $f(x)$ 滿足 $f(1) = 1, f(x) + f(1-x) = 1, f(\frac{x}{6}) = \frac{1}{2}f(x)$, 其中 $0 \leq x \leq 1$, 且對 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, 有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 則 $f(\frac{1}{2013}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. $\sum_{k=1}^{2013} \left[\sqrt[5]{\frac{2013}{k}} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 ($[]$ 為高斯符號)
5. 如圖, 若邊長為 2 的正三角形, 可經拼剪為正方形, 則 $\overline{BE} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



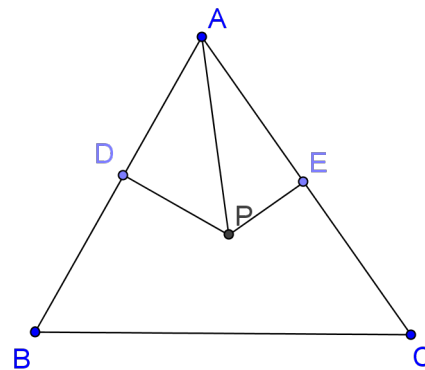
6. 空間中, 有四個球兩兩相切(外切), 半徑分別為 2, 3, 2, 3。有另一球與四球皆外切, 則其半徑 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. $OABC$ 為一邊長為 1 的正四面體, D, E 分別為 $\overline{AB}, \overline{OC}$ 中點。兩歪斜線 \overline{OD} 和 \overline{BE} 的距離為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 若 $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ 有實數解, 則 $a^2 + b^2$ 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 不等式 $\frac{2x^2-4x+3}{(x-1)^3} > x^3 + 2x$ 的實數解為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 若 a, b, c 為正實數, 則 $\frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}$ 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
11. 小明寫 n 封信分別給 n 個朋友 ($n \geq 3$), 有 n 個寫好名字的信封, 一次寫兩封, 分別隨便裝入兩個信封內, 則裝錯信之數量的期望值 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
12. 設 $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln t} dt$, 則 $\frac{d}{dx} F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

計算題 (共36分)

1. 已知方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 有三實根, 且 $-2 \leq a + b + c \leq 0$ 。求證: 此方程式必有一實根 α 滿足 $0 \leq \alpha \leq 2$ 。(10分)

2. 如右圖，銳角三角形 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上。過 D 、 E 分別作 \overline{AB} 、 \overline{AC} 之垂線，交於 $\triangle ABC$ 內部一點 P 。

試證： $\overline{AP} \cdot (\overline{BC} - \overline{DE}) \geq \overline{BD} \cdot \overline{AE} + \overline{CE} \cdot \overline{AD}$ 。(1x分)



3. 令 $S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Z}\}$, $f: S \rightarrow S$ 且 $f(x, y, z) = (xyz, xy + yz + zx, x + y + z)$ 。
求 $f(f(x, y, z)) = (x, y, z)$ 的所有解。(1x分)