

臺北市立中正高級中學 100 學年度第 2 次專任教師甄試數學科筆試試題卷

一、填充題：(每格 5 分，共 60 分)

說明：請將答案化簡後，填入答案卷中的指定位置。

1. 設 $\triangle ABC$ 三邊長為 a, b, c ，且 $\frac{b}{c-a} - \frac{a}{c+b} = 1$ ，則 $\triangle ABC$ 的最大角為_____度。

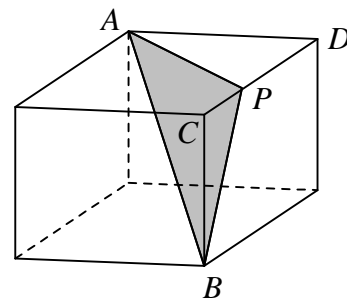
2. 設 a 為不大於 200 的自然數，若三次方程式 $x^3 - x^2 + a = 0$ 有整數根，則 a 的最大可能值為_____。

3. 設 $a \in \mathbb{R}$ ，求拋物線 $y = x^2 + (a+2)x - 2a + 1$ 頂點的軌跡方程式為_____。

4. 已知 $n \in \mathbb{N}$ ，設方程式 $x^2 + (\frac{1}{2}n+1)x + (n^2 - 2) = 0$ 的兩根為 α_n, β_n ，

則 $\frac{1}{(\alpha_3+2)(\beta_3+2)} + \frac{1}{(\alpha_4+2)(\beta_4+2)} + \dots + \frac{1}{(\alpha_{2011}+2)(\beta_{2011}+2)} =$ _____。

5. 右圖是一個長方體，其中 $\overline{AD} = 1$ ， $\overline{CD} = 2$ ， $\overline{BC} = 2$ ，點 P 是 \overline{CD} 上的動點，當 $\overline{CP} = x$ 時， $\triangle PAB$ 之面積最小，其最小面積為 y 平方單位，則 y 之值為_____。



6. 若 P_{1340}^{2010} 必為 3^k 的倍數，則 k 的最大值為_____。

(其中 $P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$ ， n, m 均為自然數。)

7. 設 $ABCDEFGHI$ 為一正九邊形，邊長為 10，則 $\overline{AC}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AD} =$ _____。

8. 數列 $\langle a_n \rangle$ 中， $a_1 = 6$ ，且 $a_n - a_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{n} + n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$ ， $n \geq 2$)，則這個數列的一般項 a_n 為_____。

9. 設 $a \in \mathbb{R}$ ，若 $n \leq a < n+1$ ，則 $[a] = n$ 。令 $f(x)$ 表 $\lceil \sqrt[m]{x} \rceil = 2$ 的最大 m 值， $m \in \mathbb{N}$ ，

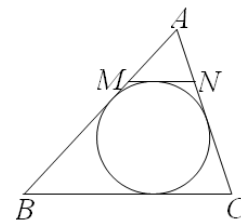
則 $\sum_{k=100}^{2011} f(k) =$ _____。

10. 令 $s = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$ ，若 $n \leq \frac{s}{10} < n+1$ ，其中 n 為自然數，

則 $n =$ _____。

11. 設 $n = 2012$ ，則 $\frac{1}{2^n} (1 - 3C_2^n + 3^2 C_4^n - 3^3 C_6^n + \dots - 3^{1005} C_{2010}^n + 3^{1006} C_{2012}^n) =$ _____。

12. 如右圖，已知 $\triangle ABC$ 的周長為 s ，在 \overline{AB} ， \overline{AC} 上分別取點 M, N ，使得 $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ ，且 \overline{MN} 與 $\triangle ABC$ 的內切圓相切，則 \overline{MN} 的最大值為_____。



二、計算證明題：(每題 10 分，共 40 分)

說明：請將作答過程書寫於答案卷中的指定位置，並標示清楚答案。

1. 下列表中的對數值有兩個是錯誤的，請予以訂正。

x	0.021	0.27	1.5	2.8
$\log x$	$2a+b+c-3$	$6a-3b-2$	$3a-b+c$	$1-2a+2b-c$
x	3	5	6	7
$\log x$	$2a-b$	$a+c$	$1+a-b-c$	$2(b+c)$
x	8	9	14	
$\log x$	$3-3a-3c$	$4a-2b$	$1-a+2b$	

2. 兩同心圓的圓心 O ，過小圓上一定點 P ，作小圓的弦 \overline{PA} ，大圓的弦 \overline{BC} ，使 $\overline{PA} \perp \overline{BC}$ 於 P 。求證： $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$ 為定值。
3. 若 n 為自然數，求證 $C_0^{2n} \cdot 3^n + C_2^{2n-2} \cdot 3^{n-1} + C_4^{2n-4} \cdot 3^{n-2} + \dots + C_{2k}^{2n-2k} \cdot 3^{n-k} + \dots + C_{2n}^{2n}$ 恆為 2^n 的倍數。
4. 直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 是直角，設 $\triangle ABC$ 的內切圓 O 交 \overline{AB} 於 D ， r 為內切圓 O 的半徑， $\overline{AB} = c$ ，求證：

$$(1) r = \frac{c}{\cot \frac{A}{2} + \cot(45^\circ - \frac{A}{2})} \quad (2) r \leq \frac{c}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

臺北市立中正高級中學 100 學年度第 2 次專任教師甄試

數學科筆試答案卷

一、填充題：(每格 5 分，共 60 分)

1. 120	2. 150	3. $y = -x^2 + 4x + 5$	4. $\frac{2009}{4022}$
5. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$	6. 670	7. 100	8. $n^2 + 3n + 2$
9. 17600	10. 19	11. $-\frac{1}{2}$	12. $\frac{s}{8}$