

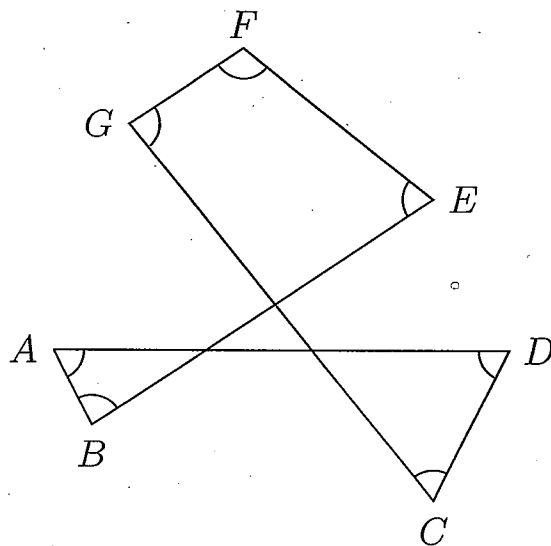
臺北市立華江高中 100 學年度第二次正式教師甄選 試題

數學科 考生姓名：\_\_\_\_\_ 准考證號碼：\_\_\_\_\_

(本試題共 3 頁，作答於答案卷，否則不予計分)

壹、填充題 (每題 7 分，共計 56 分)：

1. 如下圖所示：



求角度和

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G = \underline{\hspace{2cm}} \quad (1)$$

2. 求乘積的值

$$\sqrt{1 + \frac{2}{1}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{4}} \cdots \sqrt{1 + \frac{2}{286}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{287}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (2)$$

3. 已知  $P$  是正四面體  $ABCD$  內部的一點，而且滿足

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \sqrt{11}, \quad \overline{PC} = \overline{PD} = \sqrt{17},$$

求正四面體  $ABCD$  的邊長 =                      (3)。

4. 求滿足

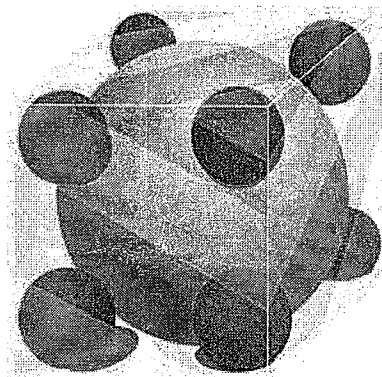
$$\sqrt[3]{\sqrt{a} - 2} = \frac{\sqrt{a} - 1}{2}$$

的所有正實數  $a = \underline{\hspace{2cm}} \quad (4)$ 。

5. 英國哥倫比亞大學物理學家懷特海德製作了一組骨牌，第一張重 1 公克最輕，以後每張重量擴大為前一張的 1.5 倍，把這套骨牌按適當間距排好，輕輕推倒第一張，必然會波及到下一張及推倒以後的骨牌。

根據萬有引力定律測得：地球質量為  $5.976 \times 10^{27}$  公克，試問：懷特海德所排的骨牌中，第     (5)     張的重量會比地球還重。（參考數據： $\log 5.976 = 0.7764$ ）

6. 一模型公司在一個內部邊長為 2 單位的透明正立方體箱子內，放置一顆半徑為 1 單位的大球，然後又要在箱子的八個角落再塞入 8 顆半徑相同的小球。問：小球的最大半徑為     (6)     單位。



7. 求值

$$\sum_{n=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (7)$$

（將答案化為最簡形式）

8. 尤拉在 1742 年時，將白努利所舉的四次多項式  $f(x)$  分解為二次多項式

$$x^2 - \left(2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}\right)x + \left(1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}} + \sqrt{7}\right)$$

與二次多項式

$$x^2 - \left(2 - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}\right)x + \left(1 - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}} + \sqrt{7}\right)$$

的乘積。白努利所舉的多項式  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (8)$  （以降次排列表示）。

貳、計算證明題（共計 44 分）：

一、（13 分）求  $\cot \frac{\pi}{24}$  的值。（必須化為最簡單的形式）

二、（18 分）

(1) 證明：對每個大於 1 的整數  $n$ ，恆有

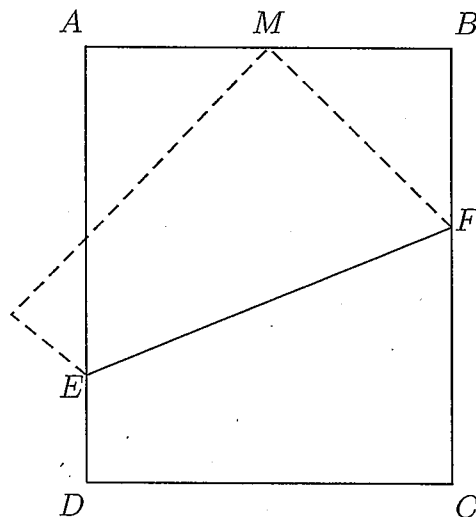
$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{n}}}}} < \frac{3}{\sqrt[2^{n-1}]{n+2}}.$$

請注意：上式右端的分母是  $n+2$  的正  $2^{n-1}$  次方根。

(2) 試證：對每個大於 1 的整數  $n$ ，恆有

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{n}}}}} < 3.$$

三、（13 分）將長  $\overline{AB} = 240$ ，寬  $\overline{BC} = 288$  的長方形紙張對摺，讓頂點  $C$  剛好落在線段  $\overline{AB}$  的中點  $M$  上，如下圖所示：



已知  $\overline{EF}$  是摺線，求摺線  $\overline{EF}$  的長度。

台北市華江高中 100 學年度教師甄選參考答案

填充題參考答案

(1)  $540^\circ$

(2) 204

(3) 6

(4) 5 或 9

(5) 159

(6)  $2 - \sqrt{3}$

(7)  $5 + 3\sqrt{2}$

(8)  $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$