

【數學科】初試試題

計算題：共十題，每題十分，作答時請按題號順序作答，並清楚標明題號。

$$1. 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

2. 給定一個橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 及內部一點 $M(2, 1)$ ，試求：

- (1) 以 M 為中點之弦 \overline{AB} 的斜率。
- (2) 直線 AB 的方程式及弦 \overline{AB} 的長度。

3. 考慮由不等式 $x+2 \geq y \geq \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ 所決定的圖形 A 。若直線 $y = ax + 1$ ($a < 0$) 將 A 的面積分成 $1:2$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 設 $ABCD$ 是邊長為 1 的正方形， P 點在 \overline{BC} 上， Q 點在 \overline{CD} 上，且 $\angle PAQ = 45^\circ$ ，試證 $\frac{\overline{AB} + \overline{BP}}{\overline{AD} + \overline{DQ}} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AQ}^2}$

$$5. \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt[n]{1^n + 2^n} + \sqrt[n]{2^n + 3^n} + \dots + \sqrt[n]{(m-1)^n + m^n}}{m^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$6. \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

7. 菱形 $ABCD$ 內接於 $y = x$ 與 $y = x^2$ 所圍區域， C, D 在 $y = x$ 上， $\overline{AD}, \overline{BC}$ 為鉛直線。若 A 之坐標為 (x_0, y_0) ，則 $x_0 + y_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 已知直角三角形斜邊上的高 h 為定數，設 s 為此直角三角形周長的一半，求 s 的極小值，並求此時的兩股長及斜邊。

9. 若圓內接四邊形 $ABCD$ 的四個邊長分別為 a, b, c, d ，設 $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ ，試證明圓內接四邊形 $ABCD$ 的面積 $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ 。

10. 設 a, b, c 均為實數，試推導出 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的解。