103 年度特殊教育教學示例

國小資優教育數學教學設計－從完美數、友誼數、費瑪平方和定理體驗數學之美

嘉義市垂楊國小　蕭武治老師

壹、設計理念

泰戈爾曾寫過一首「世界上最遠的距離」的詩，裡頭有這麼一句：世上最遠的距離，是我站在你面前，而你卻不知道我愛你。而個人對數學的認知、學數學時的感受與情緒、遇見數學問題時的行動，就是他對數學所表現出來的特質，這樣的特質關係到個案和數學的相處是敏覺的、投入的、考試的、或甚至是逃避的（陳靜姿，2000）。許嘉凌（2009）也發現六年級學生喜歡數學的因素大致有：有趣、可以思考、對以後有幫助、天生就是喜歡數學等。

國小學童從小五開始學習因數，對他們而言，這是一個新的學習概念，但往往在其學習的過程中，經常被要求做複雜、重複地計算，導致信心與興趣的流失。因此，筆者參考科普教材再結合課程內容，利用學習共同體的概念，將其轉化並設計適合學生討論與提問的教學問題，期望孩子從”數”出發，利用因數為工具，與同儕一同體驗數學世界的美好與神奇。

貳、教學分析

一、教材分析

- **完美數**：除了自己以外，一個數的所有因數加起來等於自己。
- **友誼數**：如果有 A 和 B 兩個數，A 除了自己以外的所有因數加起來等於 B，B 也是除了自己以外的所有因數加起來等於 A，那麼 A 和 B 就是在茫茫數海中最親密的數，所以我們叫他們友誼數。
- **費瑪平方和定理**：任何除以 4 之後會餘 1 的質數 ，可以寫成兩個平方數相加的總和。

1. 因數概念除了是等值分數的先備知識，也是比例概念的基石，更是往後學習因式、倍式、多項式、因式分解、數列與級數的重要基礎（劉祥通、周立勳，1999）。
2. 本教材是以因數概念為主軸，做延伸性的思考與應用，學生的先備知識需建立在能窮盡正整數的所有因數之上。
3. 平方概念此一名詞的正式定義（一數自乘兩次，稱為平方。如 5x5=25，25 稱為 5 的平方。）雖未在小學課程中被提及(七年級的數與量才提到)，但在正方形面積計算與數型中，甚至從三年級開始，便可接觸到平方公分、平方公尺、平方公里等單位，因此學生仍有許多接觸機會。

4. 完美數、費瑪平方和定理、友誼數問題之解決，學生除了需要具備能窮盡某數之因數的能力之外，對於問題題意的理解也相當重要，亦即學生能不能完全理解題目的要求，將對其解題成功與否有重要的影響。

二、學生分析

1. 本課程之目標教學學生主要為垂楊國小六年級，學校目前全面推動各科的閱讀理解教學已經進入第三年，各班級參加數學社團學生共約 6 名，每位學生在班上的數學學習表現約在前 1-2 名之間，其中一名學生為嘉義市列冊之圍棋資優生。
2. 學生在五年級時已能理解因數、倍數、公因數與公倍數（5-n-03），六年級一開始便介紹質數、合數，並能用短除法做質因數分解（6-n-01）。

三、教學方法分析

1. 教學理論：開放式教學法強調讓學生在完善的教學計畫與開放的環境中，利用自身擁有的數學知識進行非例行性問題的解題，鼓勵學生使用自然且多樣的思考來建構概念，而非傳統地求單一答案解（Conway, 1996；Miwa, 1991），此外，Nohda（2000）指出，所謂的開放式教學法，取決將數學概念以開放的問題呈現、學生能夠開放地發展學習活動，並在兩者和諧地交互作用下，學生解題時的數學概念與學習均呈現開放的態勢。Becker 和 Shimada（1997）更是認為開放式教學法活動即是以開放性問題來進行教學的活動，在此類教學活動中，學生因為可以充分發揮自身的知識、技能與思維來解決問題，因此而成為學習的主體。
2. 此教學活動主要是以開放式教學法為主，就是教學者「設計非例行性問題」給每一位學習者「解數學」、「談數學」的歷程，因此教師在選擇有價值的問題和任務供學生解題時，其角色相當重要（NCTM, 2000）。而此過程中，學生的討論與教師的提問更是教學良窳的關鍵。Goldin(1997)提到， 對於學生探索解題的歷程中，教師一開始時可以給予學生非引導性的提問（nondirective follow-up）；當學生出現非自發性的回應時，再給予最小啟發建議（minimal heuristic suggestions）的提問；而預期的表現仍然沒有自發地出現時，再給予引導式啟發建議（the guided use of heuristic suggestions）的提問；最後，當學生解題完成時，應再給予探究、後設認知式（exploratary, metacongitive）的提問。進行如此提問的目的在引發（elicit）學生與解題一致並且完整的口頭推理，以及瞭解孩子的解題思維，是否與其呈現的表徵一致。如果學生能順利回答第一步驟的提問，第二、三步驟便可省去不問，而第四個提問則用來確認學生是否真正理解問題並

進行解題。

3. Smith 與 Stein（2011）強調在實踐提問與討論時，計畫（planning）的重要性，透過計畫，使得教師在進行教學討論與提問前，便可在教學之初主動地預期（anticipating）學生對任務可能的回應、教學時監控（monitoring）其對問題的真實回應；然後於討論時選擇（selecting）特定對象（who）或概念（what）來發表與進行討論，安排（sequencing）學生以一定的順序進行發表，再將討論導引（connecting）到重要的數學概念，則這 5 個精心安排（orchestrating）的實踐（practices），將能促使有效能的數學討論。

（一）預期（anticipating）學生對任務可能的回應：教師在進行討論與提問的實踐中，第一個要做的就是預期學生如何進行教學任務，或是他們如何處理所面臨到的數學問題。這當然包括評估問題的難度是不是適合學生的程度、能不能引起學生足夠的解題興趣等。

（二）監控（monitoring）學生對問題的真實回應：當學生在進行解題、討論時，教師應在課間巡視時，就開始關注學生的數學思考、解題策略，仔細地注意學生在解題中做了些什麼，這有助於教師決定接下來發表與討論時應該關注在誰或哪些焦點上。

（三）選擇（selecting）與安排（sequencing）發表與進行討論的概念與對象：進行討論與發表時，教師應做出要以什麼順序讓學生進行發表的決定，並且藉由這些有目的地選擇，讓學生可以分享工作的成果，教師也可以使數學討論的目標與成效最大化。舉例來說，為了盡可能使越多的學生在一開始時參與討論，因此可能以最多人使用的解題策略開始提出討論與提問；也可能教師從解題策略較為具體的開始（使用繪圖、或具體物表徵），再將使用代數的提出來討論；甚至於，當班上有不少學生出現迷思概念，教師可能先將迷思概念提出來進行討論，對學生進行提問與挑戰，藉以澄清他們的迷思或錯誤概念，使他們能在接下來任務中成功地解題。

四、課程概念分析

在國小課程中，因數與倍數的討論以正整數為範圍。

依據教育部公佈的國民中小學九年一貫課程綱要數學領域的說明：「一個不為零的整數甲，若能整除另一整數乙，甲稱為乙的因數，乙稱為甲的倍數。」以 12 為例， $12 = 1 \times 12$ ，也可以是 $12 = 2 \times 6$ ，也可以是 $12 = 3 \times 4$ ，也就是說 1 、 12 、 2 、 6 、 3 、 4 都可以整除 12 ，所以 1 、 12 、 2 、 6 、 3 、 4 就是 12 的因數。

如果要知道一個數是否為另一數的因數，我們可以用除法去檢驗，例如： 13 是不是 169 的因數？我們可以用 $169 \div 13$ ，如果可以整除， 13 就是 169 的因數。如果要找出一個數的所有的因數，以 24 為例，我們有 2 種方法可以找出：一種是從小的數依序開始， 1 、 2 、 3 、 4 、 5 、 6… ，看看是不是可以整除 24 ，如果可以整除，這些數就是 24 的因數。另外，我們可以用乘法的概念來找， $24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$ ，所以 24 的因數是 1 、 24 、 2 、 12 、 3 、 8 、 4 、 6 ，這種方法較為省時省力，因為任何一數都是兩個數的乘積，所以只要找出 24 一半的因數是 1 、 2 、 3 、 4， 即可找出 24 的另一半因數 24、12、8、6 ，也就是說在找出因數 1 、 2 、 3 、 4 的同時，也得到了因數 24 、 12 、 8 、 6 。

另外，在課程中也學習質數和合數的概念：一個大於 1 的正整數只有 1 和本身兩個因數時，稱為質數，如 20 以內的質數有 2、3、5、7、11、13、17、19。 一個大於 1 的正整數如果不是質數，便稱為合數， 20 以下的合數便是 4、6、8、9、10、12、14、15、16、18。從上面的定義，我們知道 1 不是質數，也不是合數。

五、 概念架構圖

首部曲	完美數

1.討論自己心目中的完美數與原因
2.介紹完美數之定義
3.討論 1-9 中的完美數
4. 討論 10-99 中的完美數

二部曲	友誼數

1.介紹友誼數之定義
2.檢驗某些數是否有友誼數的關係
3.現在知道 284 和某一個數是友誼數，幫它找到它最親密的朋友，並且驗證之。

三部曲	費瑪平方和定理

1. 介紹費瑪平方和定理之定義
2.檢驗某些數是否符合費瑪平方和定理的關係
3.找尋 1-99 之間，符合費瑪平方和定理的數
4.討論學生尋找的方法與規則

參、教學活動設計

主題軸	數與計算	**適用年級**	高年級
單元名稱	因數與倍數	**教學時間**	80 分鐘
課程名稱	從完美數、友誼數、費瑪平方和定理體驗數學之美	**教材版本**	自編教材
設計者	蕭武治	**指導者**	劉祥通教授
教學準備	電腦、單槍、電子白板、學習單、1-100 百數板		
能力指標	N-2-04 能理解因數、倍數、公因數與公倍數。 N-3-01 能認識質數、合數，並做質因數分解。 C-T-04 能把待解的問題轉化成數學的問題。 C-S-01 能分解複雜的問題為一系列的子題。 C-S-03 能熟悉解題的各種歷程：蒐集、觀察、臆測、檢驗、推演、驗證、論證等。 C-S-04 能運用解題的各種方法：分類、歸納、演繹、推理、推論、類比、分析、變形、一般化、特殊化、模型化、系統化、監控等。 C-C-04 能用數學的觀點推測及說明解答的屬性。 C-C-07 能用回應情境、設想特例、估計或不同角度等方式說明或反駁解答的合理性。 C-C-08 能尊重他人解決數學問題的多元想法。 C-E-02 能由解題的結果重新審視情境，提出新的觀點或問題。 C-E-03 能經闡釋及審視情境，重新評估原來的轉化是否得宜，並做必要的調整。		
教學目標	(1)能理解因數、倍數及公因數的意義。 (2)能運用兩兩對應的方式窮盡所有因數，並且找尋完美數。 (3)能歸納因數有奇數個的整數，藉以認識平方數，進而理解平方數的意義。 (4)能運用策略、分析、推演、論證等方法找出最佳的解法。 (5)能有效運用實作結果判斷答案是否為最佳解。		

具體目標	教學內容	時間	評量	教學資源
	-----------------【第一節】------------------ 引起動機 哪一個數字在你的心目中是完美的？請寫下來，並且說明為什麼！ 介紹問題： 你知道嗎。這個問題如果讓數學家去選，有些人會選 6，因為 可以把 6 整除（不包含自己）（餘數為 0）的數有：	3 分鐘	理解完美數的	「完美的數字」學習單

	1、2、3，而它們全部加起來 1＋2＋3＝6 所以「6」是科學家心目中的完美數。		定義 提問與討論	
了解 10 以內正整數之因數	理解問題： Q1: 1、2、3 這三個數可以把整除，這 3 個數就是 6 的什麼？	1 分鐘		
	Q2:數學家找到 6 的所有因數後，把這些因數(自己不算)加起來，發現了什麼？	1 分鐘		
	Q3: 來找找 1-10 之間，所有數的因數，以及它們加起來有沒有符合「完美數」定義的數？	3 分鐘		
能理解「完美數」的定義	教師做結論與定義： ■ 將可以把自己整除（不包含自己）的數全部找出來，再加起來，結果等於自己的數，數學家稱為「完美數」，古希臘人認為這樣的數字最完美！ 一位西方的聖者這麼說：「因為六是一個完全數，所以上帝在六天的時間中創造了宇宙萬物。」	1 分鐘		
	解題： 除了 6(一位數)，在 10 到 99 中(兩位數)有「完全數」？試著找看看吧！	10 分鐘	解題與討論 學生可能出現之解題迷思與問題： ●找因數有缺漏。 ●無法利用除法找出某數的所有因數 ●無法利用乘法（4×6＝24）來找出某數的所有因數，並發現「因數成雙」	
能窮盡 10-99 之間數的所有因數	如果教師發現學生出現解題困難或沒有目標，可以建議學生：把不可能是完美數的先剔除 學生解題討論與比較： 第二個完全數是 28，它有因數 1、2、4、7、14、28	4 分鐘		
	教師總結 第一個完全數是 6，它有因數 1、2、3、6，除去它本身 6 外，其餘 3 個數相加，1+2+3＝6，恰好等於本身。第二個完全數是 28，它有因數 1、2、4、7、14、28，除去它本身 28 外，其餘 5 個數相加，1+2+4+7+14＝28，也恰好等於本身。後面的數是 496，同學可以回家找看看 496 是不是真的是一個完美數？你能找出它所有的因數？ 介紹了完美數，我們這次介紹「友誼數」。	2 分鐘	學生能找出或驗證出 28 是完美數	

能理解「友誼數」的定義 能窮盡284與220之間數的所有因數，並且檢驗	**引起動機** 西元前500年希臘畢達哥拉斯的兄弟會認為有兩個數是象徵友誼的符號，因為他們發現者這兩個數的所有正因數相加的和等於對方，這一對你儂我儂的數字，彼此交融。 介紹問題： 所謂的友誼數是： A和B兩個數，A除了自己以外的所有因數加起來等於B，B也是除了自己以外的所有因數加起來等於A，那麼A和B就是在茫茫數海中最親密的數，所以我們叫他們友誼數。 比如我們來看看40這個數的所有因數（不含自己）有：1、2、4、5、8、10、20，這些因數的和是：1+2+4+5+8+10+20=50 50這個數的所有因數（不含自己）有：1、2、5、10、25，這些因數的和是：1+2+5+10+25=43 所以40和50這兩個數不是友誼數。 解題： 現在知道284和某一個數是友誼數，請幫它找到它最親密的朋友？ 學生解題討論與比較： 284：1+2+4+71+142=220 220：1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284 教師總結 220、284就是史上第一對被發現的親和數。西元1984年英國倫敦Viking出版了Martin Gardner所著《Mathematical Magic Show》一書，書中提道說220與284在中世紀的占星術鑄件與護身符扮演增進情誼的角色（好朋友之間可以用這兩個數相送）。 ------------------【第二節】-------------------	1分鐘 10分鐘	解題與討論 學生可能出現之解題迷思與問題： ●找因數有缺漏。 ●無法利用除法找出某數的所有因數 ●無法利用乘法（4×6＝24）來找出某	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>引起動機
資料研讀：
費瑪（1601 年 8 月 20 日～1665 年 1 月 12 日）出生於一個皮革商的家庭，位在法國的 Toulouse 附近。他在 Toulouse 大學讀法律，畢業後的正業是律師、宮庭顧問，並且在 1631 年成為 Toulouse 地區的議員。
在忙碌的正業之外，數學是他的業餘嗜好。他利用空閒的時間研究數學，並且將所得的結果，寄給朋友，互相討論，或保留著沒有發表。他的稿件，在他死後由其兒子在 1679 年出版，這就是我們所知道的費瑪的著作《Varia Opera》。
費瑪最後定理：
設 n 為大於 2 之整數，則方程式 xn + yn = zn 沒有正整數解。
對於這個最後定理，費瑪在他的書頁中寫道（約 1637 年）：我發現了一個美妙的證明，但由於空白太小，而沒有寫下來。 就這樣一句話，讓後來的數學家忙碌了 357 年，也犯過許多錯誤，終於在 1994 年由 A. Wiles 提出正確的證明。由於費瑪對數學的重大貢獻，後人尊稱他為「業餘數學家之王」，數學史家 E.T. Bell 稱讚他為「大師中的大師」(A master of masters)，簡直比數學家還要數學家！Toulouse 的市政廳還立有費瑪與繆思女神 (Muse) 並坐在一起的銅像。

費瑪平方和定理：任何除以 4 之後會餘 1 的質數 ，可以寫成兩個平方數相加的總和。
解題：
一起找出 1-20 之間，符合費馬平方和定理的數有哪</td>
<td>4 分鐘

2 分鐘</td>
<td>數的所有因數，並發現「因數成雙」

解題與討論</td>
<td>「費瑪」學習單</td>
</tr>
</table>

能窮盡1-99之間所有質數，並且檢驗其事否符合費平平方和定理	些？ 請學生找出 21-99 之間，符合費馬平方和定理的數有哪些？ 學生解題討論與比較： 教師總結 1-99 之間的數中，符合費瑪平方和定理的數有 5=1*1+2*2　13=2*2+3*3　17=1*1+4*4 29=2*2+5*5　37=1*1+6*6　41=4*4+5*5 53=2*2+7*7　61=5*5+6*6　73=3*3+8*8 89=5*5+8*8　97=4*4+9*9	10 分鐘 15 分鐘 10 分鐘 3 分鐘	學生可能出現之解題迷思與問題： ●找或檢驗質數有缺漏。 ●無法表達某質數的平方數相加的總和 部分學生能反思所學，得到規律地發現 解題與討論 討論與分享	

參考文獻

中文部分

1．教育部（2008）。*國民中小學九年一貫課程綱要總綱*。台北：教育部。

2．許嘉凌（2009）。*國小六年級學生數學學習情意與模式之研究*。國立屏東教育大學數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東。

3．陳靜姿（2000）。不同數學學習氣質學生情意和成長特徵之探討。*國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系教育心理學報，民９９，４２ 卷，１ 期*，７７ - ９８ 頁。

4. 劉祥通、 周立勳。(1999)。國小比例問題實踐課程開發之研究。*中師數理學報,，3（1）*，頁1-25。（NSC-87-2511-S-023-003 ）。

英文部分

1. Becker, J & Shimada, S., (1997).*The Open-Ended Approach, A New Proposal for Teaching Mathematics*, NCTM.

2. Conway, K. D. 1996. The effects of the "Open Approach" to teaching mathematics on elementary preservice teachers' problem solving performance, attitudes toward mathematics, and beliefs about mathematics. Ph. D. Dissertation. Southern Illinois University at Carbondale , Illinois, USA.

3. Goldin, G. A. (1997). Observing mathematical problem solving through task-based interviews. In A. R. Teppo (Ed.),Qualitative research methods in mathematics education,[Monograph] *Journal for Research in Mathematics Education. (Vol. 9*, pp. 40-62, 164-177). Reston, VA: NCTM.

4. Miwa, T.(1991). A comparative study on classroom practices of mathematical problem solving between Japan and the US. *sukuba journal of educational study in mathematics,*1081-84.

5. National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principle and Standards for School Mathematics. Reston*, VA: NCTM 2000.

6.Nohda, N. (2000). Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom.In: *Proceedings of the PME-24 Conference (eds. T. Nakahara & M. Koyama), Vol.1*,39-53. Hiroshima University (Japan).

7.Smith,M.S. & Stein,M.S.(2011).*Five Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions,* NCTM.

六年（ ）班開放數學題 （單元：找因數）姓名：

完 美 的 數 字

1. 哪一個數字在你的心目中是完美的？請寫下來，並且說明為什麼！

2. 你知道嗎。這個問題如果讓數學家去選，有些人會選 6，因為

- 可以把 6 整除（不包含自己）（餘數為 0）的數有：

  1、2、3，而它們全部加起來 1＋2＋3＝6

- 將**可以把自己整除（不包含自己）的數全部找出來，再加起來，結果等於自己的數**，數學家稱為「完全數」，古希臘人認為這樣的數字最完美！

- 一位西方的聖者這麼說：「因為六是一個完全數，所以上帝在六天的時間中創造了宇宙萬物。」

3. 除了 6（一位數），在 10 到 99 中（兩位數）有「完全數」？試著找看看吧！

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

給你一些建議：把絕對不可能的先剔除➔這時你必須先思考，哪些特質的數「絕對不可能」？

六年（ ）班開放數學題 （單元：找質數）姓名：

費瑪平方和定理

費瑪(1601 年 8 月 20 日～1665 年 1 月 12 日)出生於一個皮革商的家庭,位在法國的 Toulouse 附近。他在 Toulouse 大學讀法律，畢業後的正業是律師、宮庭顧問，並且在 1631 年成為 Toulouse 地區的議員。

在忙碌的正業之外，數學是他的業餘嗜好。他利用空閒的時間研究數學，並且將所得的結果，寄給朋友，互相討論，或保留著沒有發表。他的稿件，在他死後由其兒子在 1679 年出版，這就是我們所知道的費瑪的著作《Varia Opera》。

費瑪最後定理：

設 n 為大於 2 之整數，則方程式 $x^n + y^n = z^n$ 沒有正整數解。

對於這個最後定理，費瑪在他的書頁中寫道（約 1637 年）：我發現了一個美妙的證明，但由於空白太小，而沒有寫下來。 就這樣一句話，讓後來的數學家忙碌了 357 年，也犯過許多錯誤，終於在 1994 年由 A. Wiles 提出正確的證明。由於費瑪對數學的重大貢獻，後人尊稱他為「業餘數學家之王」，數學史家 E.T. Bell 稱讚他為「大師中的大師」(A master of masters)，簡直比數學家還要數學家！Toulouse 的市政廳還立有費瑪與繆思女神 (Muse) 並坐在一起的銅像。

費瑪平方和定理：任何除以 4 之後會餘 1 的質數 ，可以寫成兩個平方數相加的總和。
請找出 1-99 之間，可以符合**費瑪平方和定理的數**。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99